Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

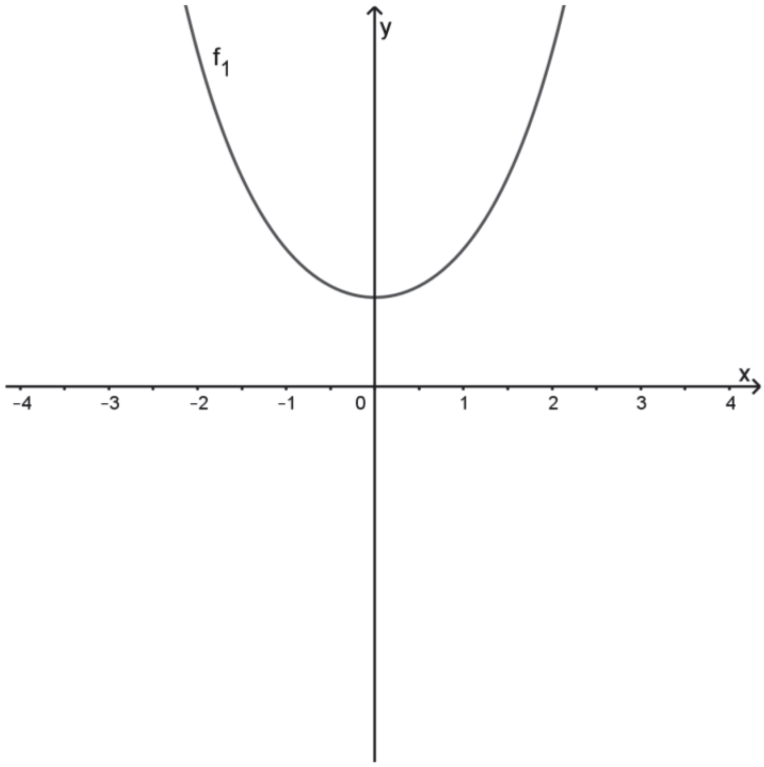
Mathematik, Leistungskurs WBK,

weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 25 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f_1.



Abbildung

a) (1) *Geben Sie $f_a(0)$ an und begründen Sie, dass f_a keine Nullstellen besitzt.*

(2) *Zeigen Sie, dass $f_a(x) = -f_{-a}(x)$ gilt und interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.*

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die lokalen Extrempunkte von f_a in Abhängigkeit von a.*

(5 Punkte)

Im Folgenden wird $a = 1$ und damit die Funktion f_1 mit $f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Darüber hinaus ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Es gilt: $f_1'(x) = h(x)$ und $h'(x) = f_1(x)$.

c) (1) *Zeigen Sie:* $f_1(x) > h(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von h in der Abbildung auf Seite 1.*

(3) *Bestimmen Sie* $\int_0^2 \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x$ *und stellen Sie die geometrische Bedeutung dieses Terms in der Abbildung dar.*

(4) *Geben Sie begründet für die Funktionen* f_1 *und h jeweils eine Stammfunktion an und weisen Sie rechnerisch nach:* $\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x = 1 - e^{-b}$.

(5) *Geben Sie* $\lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x \right)$ *an und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.*

(2 + 2 + 3 + 5 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs WBK,

weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 25 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien:*
   - Entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

1 Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f_a(0) = a$.

$$f_a(x) = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Der Term in der Klammer ist größer als Null, da $e^{\frac{x}{a}} > 0$ und $e^{-\frac{x}{a}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Mit $a \neq 0$ folgt, $f_a(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \neq 0$. Somit besitzt f_a keine Nullstellen.

(2) $-f_{-a}(x) = -\frac{-a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{-a}} + e^{-\frac{x}{-a}}\right) = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = f_a(x)$.

Der Graph der Funktion f_a entspricht dem an der x-Achse gespiegelten Graphen der Funktion f_{-a}.

Teilaufgabe b)

$$f_a'(x) = \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}} + \left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

$$f_a''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{x}{a}} - \left(-\frac{1}{a}\right)\cdot e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$.

$$f_a'(x) = 0 \iff \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = 0 \iff e^{\frac{x}{a}} = e^{-\frac{x}{a}} \iff \frac{x}{a} = -\frac{x}{a} \iff x = 0.$$

Die hinreichende Bedingung $f_a'(0) = 0$ und $f_a''(0) = \frac{1}{2a}\left(e^0 + e^0\right) = \frac{1}{a}$ liefert

für $a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$ einen lokalen Tiefpunkt in $P(0 \mid a)$ und

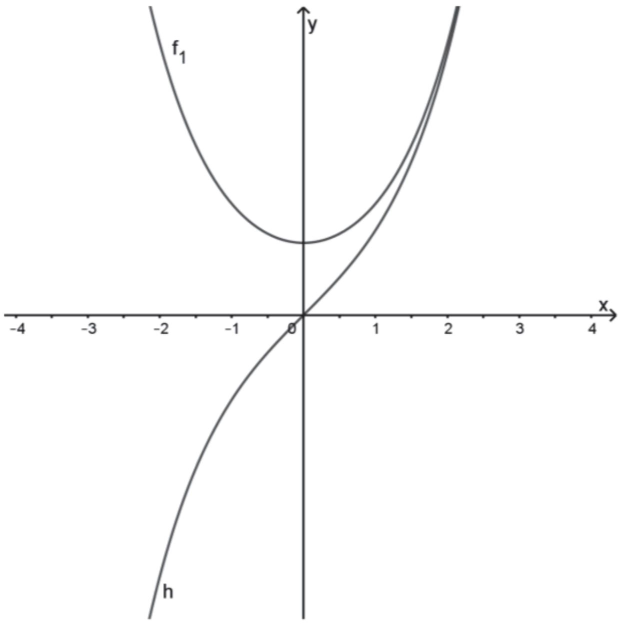
für $a < 0 \iff \frac{1}{a} < 0$ einen lokalen Hochpunkt in $P(0 \mid a)$.

Teilaufgabe c)

(1) $f_1(x) > h(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) - h(x) > 0$.

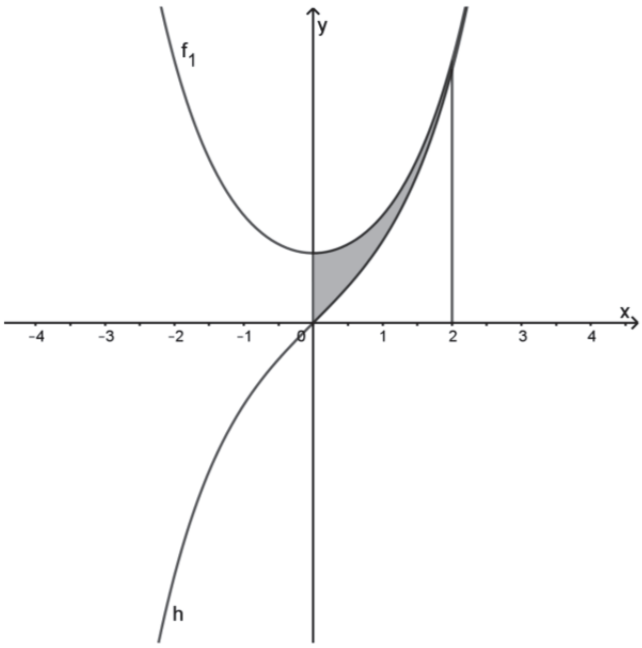
$$f_1(x) - h(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x + e^{-x}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x} - \left(-e^{-x}\right)\right) = e^{-x} > 0\,.$$

(2)



[Der Graph von h sollte durch den Ursprung verlaufen und den Graphen von f_1 nicht schneiden.]

(3) $\int_0^2 \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x \approx 0{,}865$.



(4) Wegen $f_1'(x) = h(x)$ ist f_1 eine Stammfunktion von h.

Wegen $h'(x) = f_1(x)$ ist h eine Stammfunktion von f_1.

$$\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x = \left[h(x) - f_1(x)\right]_0^b = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^x - e^{-x}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(e^x + e^{-x}\right)\right]_0^b = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} - (-1)$$
$$= 1 - e^{-b}.$$

(5) $\lim\limits_{b\to\infty}\left(\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x\right) = 1.$

Für $b \to \infty$ ist der Grenzwert des Inhalts der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und h über dem Intervall $[0;b]$ eins.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt $f_a(0)$ an.	1			
2	(1) begründet, dass f_a keine Nullstellen besitzt.	2			
3	(2) zeigt, dass $f_a(x) = -f_{-a}(x)$ gilt.	1			
4	(2) interpretiert die Gleichung geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt rechnerisch die lokalen Extrempunkte von f_a in Abhängigkeit von a.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die Ungleichung gilt.	2			
2	(2) skizziert den Graphen von *h* in der Abbildung.	2			
3	(3) bestimmt das Integral.	2			
4	(3) stellt die geometrische Bedeutung des Terms in der Abbildung dar.	1			
5	(4) gibt begründet die jeweiligen Stammfunktionen an.	2			
6	(4) weist rechnerisch die gegebene Gleichung nach.	3			
7	(5) gibt den Grenzwert an und interpretiert ihn geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**14**			

Summe insgesamt	**25**			