Name: ____________________

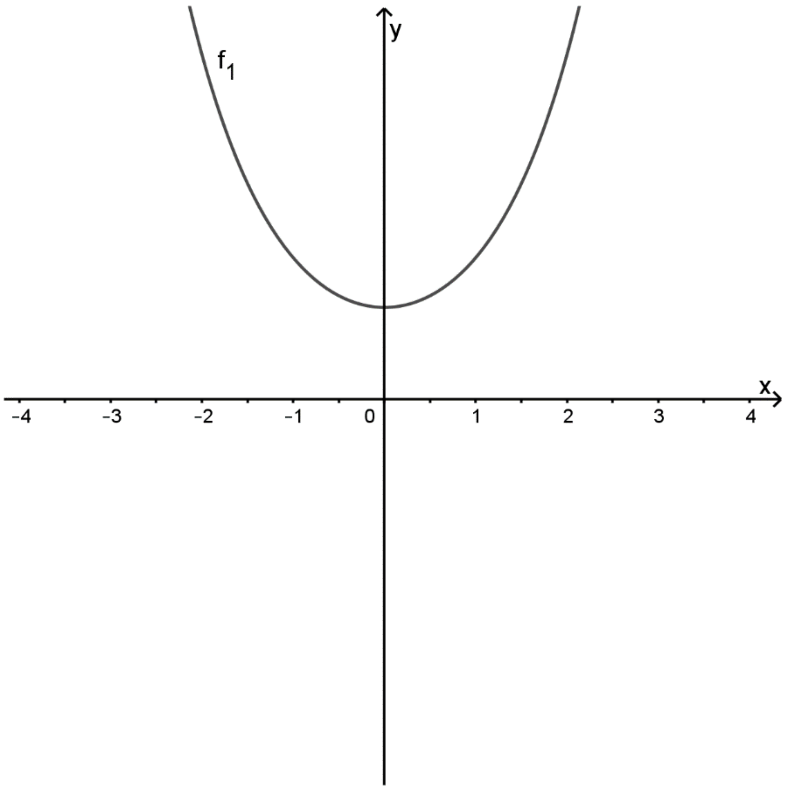
Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs WBK
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Die *Abbildung* zeigt den Graphen der Funktion f_1.



Abbildung

Name: ____________________

a) (1) *Geben Sie* $f_a(0)$ *an und begründen Sie, dass* f_a *keine Nullstellen besitzt.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von* f_a *in Abhängigkeit von a.*

(3 + 5 Punkte)

Im Folgenden wird $a = 1$ und damit die Funktion f_1 mit $f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, betrachtet. Darüber hinaus ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Es gilt: $f_1'(x) = h(x)$ und $h'(x) = f_1(x)$.

b) (1) *Zeigen Sie:* $f_1(x) > h(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von h in der Abbildung auf Seite* 1.

(3) *Berechnen Sie* $\int_0^2 \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x$ *und stellen Sie die geometrische Bedeutung dieses Terms in der Abbildung dar.*

(4) *Weisen Sie rechnerisch nach:* $\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-b}$.

(5) *Geben Sie den Grenzwert des Integrals* $\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x$ *für* $b \to \infty$ *an und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.*

(2 + 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs WBK
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfung bzw. Verkettung mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien:*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f_a(0) = a$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} > 0$, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} > 0$ und $a \neq 0$ und somit $\frac{a}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) \neq 0$.

(2) $f_a'(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$.

$f_a''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{a}} - \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2a} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen von f_a:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{a}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = -\frac{x}{a}$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Zusätzlich gilt: $f_a''(0) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\right) = \frac{1}{a}$. Damit folgt:

Für $a > 0$ ist $P(0 \mid a)$ der lokale Tiefpunkt des Graphen von f_a.

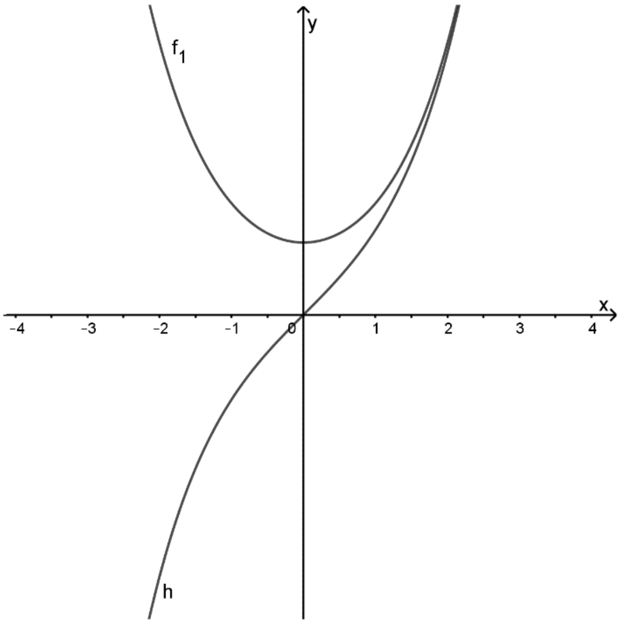
Für $a < 0$ ist $P(0 \mid a)$ der lokale Hochpunkt des Graphen von f_a.

Teilaufgabe b)

(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

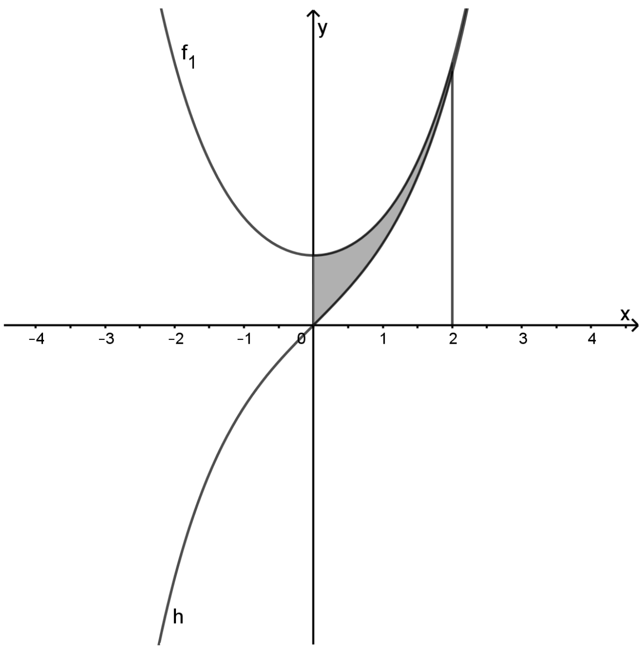
$$f_1(x)-h(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}-\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right)=\mathrm{e}^{-x}>0 \Rightarrow f_1(x)>h(x).$$

(2)



[Der Graph von *h* sollte durch den Ursprung verlaufen und den Graphen von f_1 nicht schneiden.]

(3) $\int_0^2 \left(f_1(x)-h(x)\right)\mathrm{d}x \approx 0{,}865$.



(4) $\int_0^b \left(f_1(x)-h(x)\right)\mathrm{d}x = \left[h(x)-f_1(x)\right]_0^b$ [Da $f_1(x)=h'(x)$ und $h(x) = f_1'(x)$.]

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^b$$

$$= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b$$

$$= -\mathrm{e}^{-b}-(-1)$$

$$= 1-\mathrm{e}^{-b}.$$

(5) $\int_0^b \left(f_1(x)-h(x)\right)\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-b} \to 1$ für $b\to\infty$.

Die y-Achse, der Graph von f_1 und der Graph von h begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche, die unendlich weit nach rechts ausgedehnt ist.

Diese Fläche besitzt den endlichen Flächeninhalt 1 FE.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt $f_a(0)$ an.	1			
2	(1) begründet, dass f_a keine Nullstellen besitzt.	2			
3	(2) bestimmt rechnerisch die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.	5			
	Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………..... ………………………………………………………………				
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt: $f_1(x) > h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	2			
2	(2) skizziert den Graphen von h in der Abbildung.	2			
3	(3) berechnet $\int_0^2 \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x$.	2			
4	(3) stellt die geometrische Bedeutung des Terms in der Abbildung dar.	1			
5	(4) weist rechnerisch nach: $\int_0^b \left(f_1(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-b}$.	3			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

6	(5) gibt den Grenzwert des Integrals $\int_0^b \left(f_1(x)-h(x)\right)\mathrm{d}x$ für $b \to \infty$ an und interpretiert diesen Wert geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**12**			

Summe insgesamt	**20**			