



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023) *Mathematik, Leistungskurs*

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

- a) Ein Unternehmen stellt in großer Stückzahl technische Geräte her. Ein Viertel der hergestellten Geräte ist fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Geräte in einer Stichprobe soll modellhaft als binomialverteilt angenommen werden.
- (1) 20 Geräte werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau fünf Geräte sind fehlerhaft.“
B: „Mehr als fünf Geräte sind fehlerhaft.“
C: „Mindestens drei, aber weniger als acht Geräte sind fehlerhaft.“
- (2) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - (0,25^8 + 0,75^8)$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.*



Name: _____

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. *Abbildung 1* zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

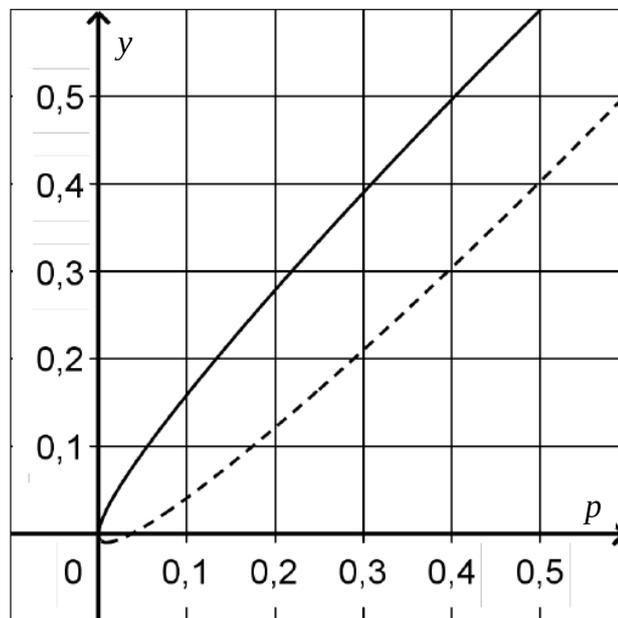


Abbildung 1

- (3) *Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen.*
- (4) *Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %.*

(4 + 3 + 3 + 3 Punkte)



Name: _____

b) Eine binomialverteilte Zufallsgröße Y gibt für eine Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \leq p \leq 1$ die Anzahl der Treffer bei 20 Versuchen an.

(1) *Abbildung 2* zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße mit der Wertemenge $\{0;1;2;\dots;20\}$.

Begründen Sie, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.

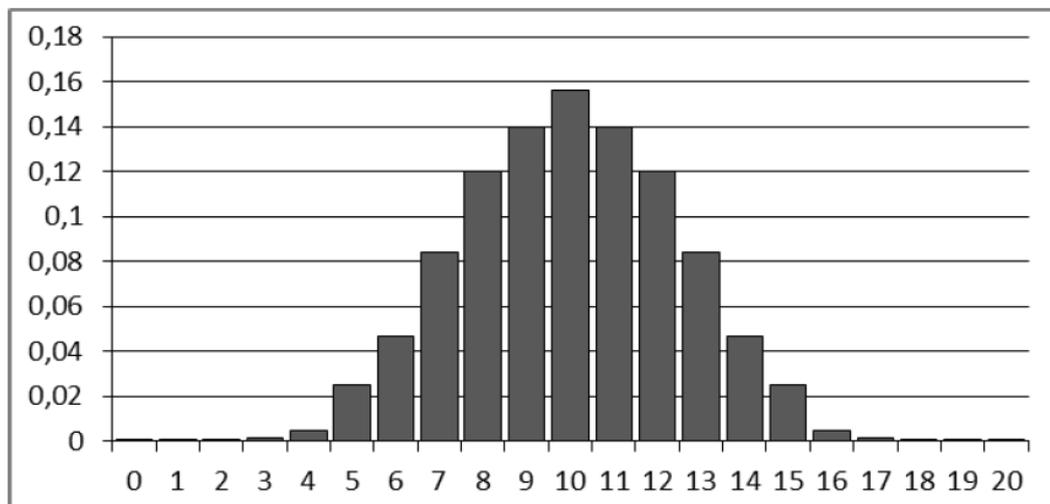


Abbildung 2

(2) *Bestimmen Sie diejenigen Werte von p , für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y den Wert 10 annimmt, 4,7 % ist.*

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2019, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Stochastik, Aufgabe 5 (WTR)

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Stochastik

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang
- Normalverteilung: Dichtefunktion, („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter μ und σ , Graph der Verteilungsfunktion

5. Zugelassene Hilfsmittel

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) X : Anzahl der fehlerhaften Geräte

$$A: P_{0,25}^{20}(X = 5) \approx 20,2\%$$

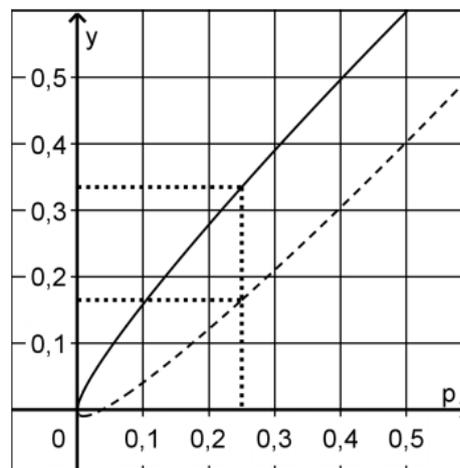
$$B: P_{0,25}^{20}(X \geq 6) \approx 38,3\%$$

$$C: P_{0,25}^{20}(3 \leq X \leq 7) \approx 80,7\%$$

(2) Zufallsexperiment: Acht Geräte werden zufällig ausgewählt.

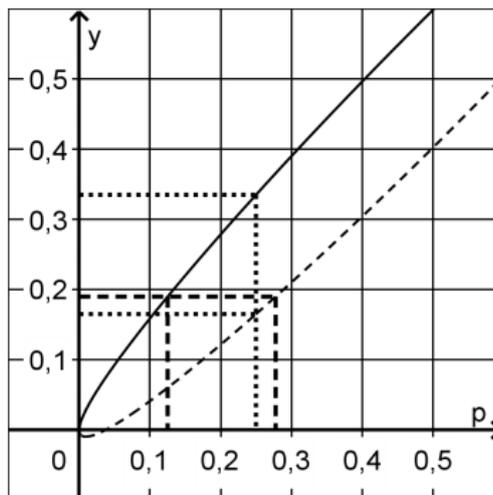
Ereignis: Von den ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft und mindestens eines nicht fehlerhaft.

(3)



Wäre die Anzahl fehlerhafter Geräte in der Stichprobe kleiner als 17 oder größer als 33, so würde Anlass dazu bestehen, die Korrektheit des gegebenen Anteils infrage zu stellen.

(4)



Für das Konfidenzintervall ergibt sich näherungsweise $[0,13; 0,28]$.

Teilaufgabe b)

- (1) Würde es sich um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln, so wäre aufgrund der Symmetrie $p = 0,5$.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße Z mit $p = 0,5$ gilt: $P_{0,5}^{20}(Z = 10) \approx 0,176$.

Die abgebildete Wahrscheinlichkeitsverteilung zeigt für 10 Treffer jedoch eine Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 0,16 ist.

(2)

$$\binom{20}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{10} = 0,047$$

$$\Leftrightarrow p \cdot (1-p) = \sqrt[10]{\frac{0,047}{184756}}$$

Aus $-p^2 + p \approx 0,2191$ folgt

$$p \approx 0,5 - \sqrt{0,25 - 0,2191} \approx 0,324 \quad \vee \quad p \approx 0,5 + \sqrt{0,25 - 0,2191} \approx 0,676.$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt für die Ereignisse A , B und C jeweils die Wahrscheinlichkeit.	4			
2	(2) beschreibt im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem angegebenen Term berechnet werden kann und gibt dieses Ereignis an.	3			
3	(3) bestimmt mithilfe der Abbildung alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen.	3			
4	(4) bestimmt grafisch das zu der Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
Summe Teilaufgabe a)		13			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) begründet, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.	3			
2	(2) bestimmt diejenigen Werte von p , für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y den Wert 10 annimmt, 4,7 % ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7)					
Summe Teilaufgabe b)		7			
Summe insgesamt		20			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur