



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023) *Mathematik, Leistungskurs*

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

- a) Ein Unternehmen stellt in großer Stückzahl technische Geräte her. Ein Viertel der hergestellten Geräte ist fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Geräte in einer Stichprobe soll modellhaft als binomialverteilt angenommen werden.
- (1) 20 Geräte werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau fünf Geräte sind fehlerhaft.“
B: „Mehr als fünf Geräte sind fehlerhaft.“
C: „Mindestens drei, aber weniger als acht Geräte sind fehlerhaft.“
- (2) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - (0,25^8 + 0,75^8)$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.*



Name: _____

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. *Abbildung 1* zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \quad g: p \mapsto p + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

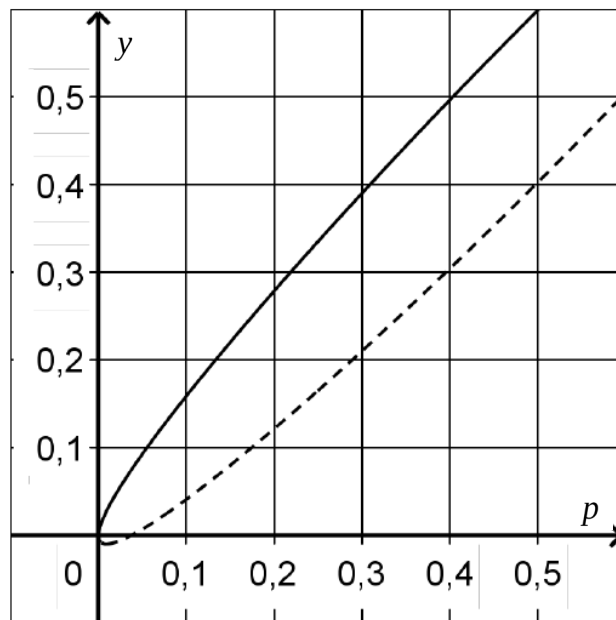


Abbildung 1

- (3) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen.
- (4) Die betrachtete Stichprobe enthält 23 fehlerhafte Geräte.
Berechnen Sie das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %.



Name: _____

(5) Gegeben ist die folgende Näherungslösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang:

$$2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \leq 0,1$$

$$\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \leq \sqrt{\frac{0,5^2}{n}} \quad \text{für alle } h \in [0;1]$$

$$2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5^2}{n}} \leq 0,1 \quad \text{liefert } n \geq 385$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

(4 + 3 + 3 + 2 + 3 Punkte)

b) Eine binomialverteilte Zufallsgröße Y gibt für eine Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \leq p \leq 1$ die Anzahl der Treffer bei 20 Versuchen an.

(1) *Abbildung 2* zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße mit der Wertemenge $\{0;1;2;\dots;20\}$.

Begründen Sie, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.

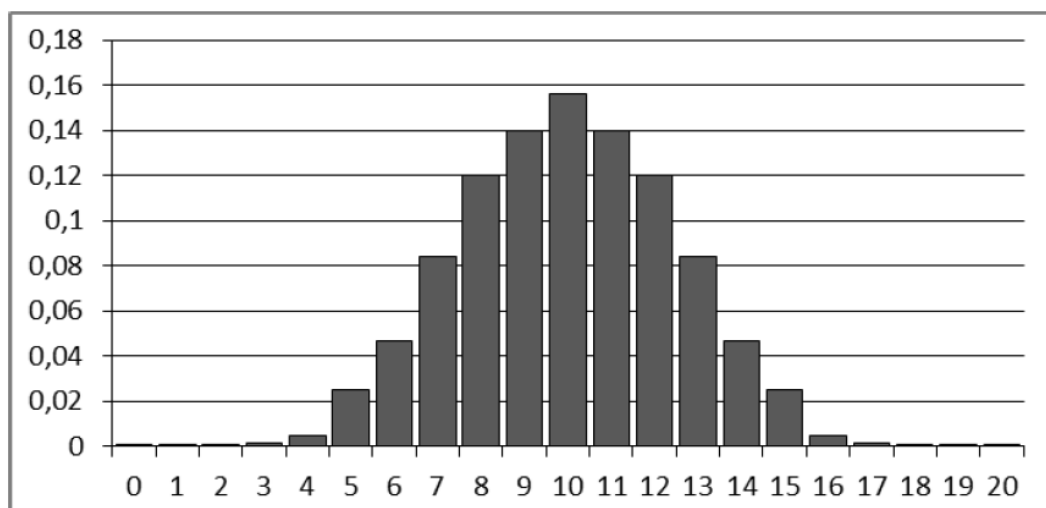


Abbildung 2

(2) Bestimmen Sie diejenigen Werte von p , für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y den Wert 10 annimmt, 4,7 % ist.

(3 + 2 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2019, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Stochastik, Aufgabe 5 (WTR)

Aufgabe a) (5) nach IQB: Pool für das Jahr 2020, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Stochastik, Aufgabe 2 (MMS)

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Stochastik

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang
- Normalverteilung: Dichtefunktion, („Gauß'sche Glockenkurve“), Parameter μ und σ , Graph der Verteilungsfunktion

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

- (1) X : Anzahl der fehlerhaften Geräte

$$A: P_{0,25}^{20}(X = 5) \approx 20,2\%$$

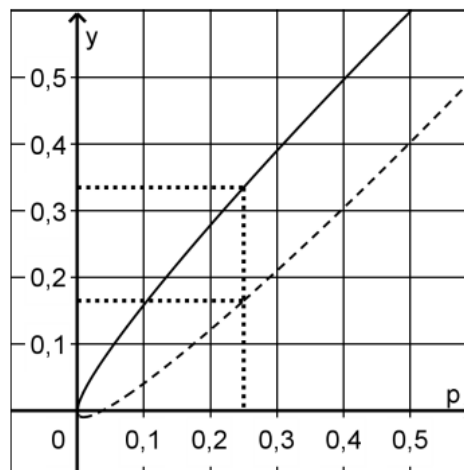
$$B: P_{0,25}^{20}(X \geq 6) \approx 38,3\%$$

$$C: P_{0,25}^{20}(3 \leq X \leq 7) \approx 80,7\%$$

- (2) Zufallsexperiment: Acht Geräte werden zufällig ausgewählt.

Ereignis: Von den ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft und mindestens eines nicht fehlerhaft.

- (3)



Wäre die Anzahl fehlerhafter Geräte in der Stichprobe kleiner als 17 oder größer als 33, so würde Anlass dazu bestehen, die Korrektheit des gegebenen Anteils infrage zu stellen.

(4)

$$|h - p| \leq 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{100}} \text{ liefert mit } h = \frac{23}{100} \text{ näherungsweise } [0,158 ; 0,321].$$

- (5) Aufgabenstellung: Ermitteln Sie, wie groß der Umfang einer Stichprobe mindestens sein muss, damit die Länge des Konfidenzintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95% für jeden Anteil fehlerhafter Geräte in der Stichprobe höchstens 0,1 beträgt.

Teilaufgabe b)

- (1) Würde es sich um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln, so wäre aufgrund der Symmetrie $p = 0,5$.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße Z mit $p = 0,5$ gilt: $P_{0,5}^{20}(Z = 10) \approx 0,176$.

Die abgebildete Wahrscheinlichkeitsverteilung zeigt für 10 Treffer jedoch eine Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 0,16 ist.

(2)

$$\binom{20}{10} \cdot p^{10} \cdot (1 - p)^{10} = 0,047 \text{ liefert } p \approx 0,324 \text{ oder } p \approx 0,676.$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) bestimmt für die Ereignisse A , B und C jeweils die Wahrscheinlichkeit.	4			
2	(2) beschreibt im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem angegebenen Term berechnet werden kann und gibt dieses Ereignis an.	3			
3	(3) bestimmt mithilfe der Abbildung alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen.	3			
4	(4) berechnet das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %.	2			
5	(5) formuliert eine passende Aufgabenstellung.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15)					
Summe Teilaufgabe a)		15			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.	3			
2	(2) bestimmt diejenigen Werte von p , für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y den Wert 10 annimmt, 4,7 % ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5)					
Summe Teilaufgabe b)		5			

Summe insgesamt	20			
------------------------	-----------	--	--	--

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur