



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023) Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Die *Abbildung 1* zeigt das Viereck $ABCD$ mit $A(0|3|0)$, $B(0|9|0)$, $C(2|8|4)$ und $D(2|4|4)$. Gegeben sind außerdem die Punkte $S_t(0|6|t)$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

- a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, und dass dieses Trapez kein Rechteck ist.

(4 Punkte)

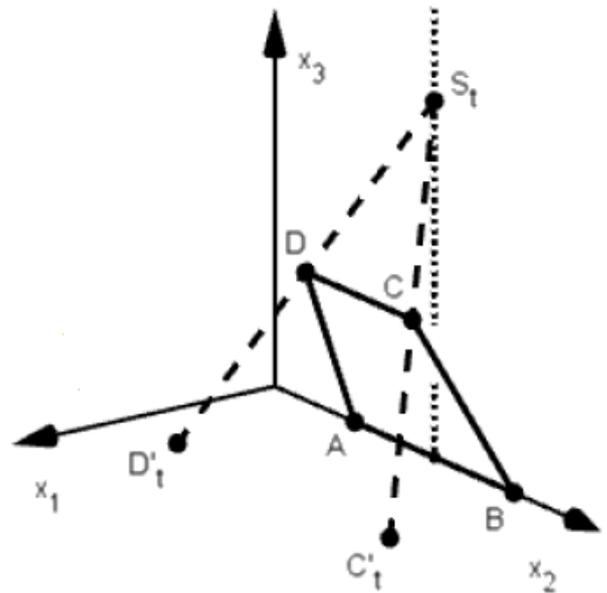


Abbildung 1

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

(3 Punkte)

- c) Das Viereck $ABCD$ liegt in der Ebene $E: 2x_1 - x_3 = 0$.

Begründen Sie, dass es keinen Wert von t gibt, für den $\overline{DS_t}$ senkrecht zu E steht.

(2 Punkte)



Name: _____

- d) Vom Punkt S_t aus wird das Lot auf die Ebene E gefällt.

Ermitteln Sie diejenigen Werte von t , für die der Lotfußpunkt im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.

(6 Punkte)

Im Folgenden gilt $t > 4$.

Die Gerade durch die Punkte S_t und C schneidet die x_1x_2 -Ebene im Punkt C'_t , die Gerade durch die Punkte S_t und D schneidet diese Ebene im Punkt D'_t (vgl. Abbildung 1).

- e) Die beiden folgenden Gleichungen I und II liefern gemeinsam einen bestimmten Wert von t .

$$I \quad \overrightarrow{OS_t} + r \cdot \overrightarrow{S_t C} = \overrightarrow{OC'_t} \text{ mit } C'_t(x_1 | x_2 | 0) \qquad II \quad \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC'_t} = 0$$

Geben Sie die Art des Vierecks $ABC'_tD'_t$ für diesen Wert von t an.

(2 Punkte)

- f) Das Volumen der Pyramide $ABC'_tD'_tS_t$ wird in Abhängigkeit von t durch einen der drei abgebildeten Graphen G_1 , G_2 und G_3 in *Abbildung 2* dargestellt. *Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.*

(3 Punkte)

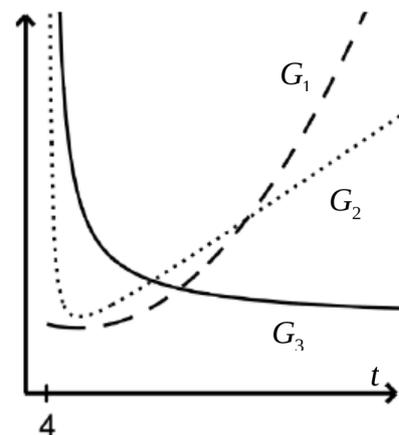


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2023, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2), Aufgabe 2 (MMS)

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)
- Lineare Gleichungssysteme

5. Zugelassene Hilfsmittel

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Sowohl A und B als auch C und D haben übereinstimmende x_1 - und x_3 -Koordinaten, \overline{AB} und \overline{CD} sind also parallel.

$$\text{Außerdem gilt } |\overline{AD}| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix} = |\overline{BC}| \text{ sowie } \overline{AB} \circ \overline{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \neq 0.$$

Teilaufgabe b)

Mit $F(0|4|0)$ ist $|\overline{FD}|$ die Höhe des Trapez.

$$\text{Flächeninhalt: } \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \cdot |\overline{FD}| = \frac{1}{2} \cdot (6 + 4) \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} = 10\sqrt{5}.$$

Teilaufgabe c)

Aufgrund der x_2 -Koordinate kann $\overline{DS}_t = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ t-4 \end{pmatrix}$ nicht kollinear zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein.

Teilaufgabe d)

Eine Gleichung der Geraden, die durch S_t verläuft und senkrecht zu E steht, ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ t \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

Mit $2x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow 4r - t + r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{t}{5}$ ergibt sich als Lotfußpunkt $\left(\frac{2}{5}t \mid 6 \mid \frac{4}{5}t \right)$.

Dieser liegt für $0 < \frac{2}{5}t < 2 \Leftrightarrow 0 < t < 5$ im Inneren des Vierecks.

Teilaufgabe e)

Rechteck

Teilaufgabe f)

Graph G_2

Begründung: Für $t \rightarrow 4$ wird der Inhalt der Grundfläche der Pyramide beliebig groß, während die Höhe stets größer als 4 ist. Für $t \rightarrow +\infty$ wird die Höhe beliebig groß, während der Inhalt der Grundfläche stets größer ist als der Inhalt des Vierecks mit den Eckpunkten A , B , $(2|8|0)$ und $(2|4|0)$. Damit wird das Volumen in beiden Fällen beliebig groß.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	weist nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, und dass dieses Trapez kein Rechteck ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe a)		4			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	berechnet den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3)					
Summe Teilaufgabe b)		3			

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	begründet, dass es keinen Wert von t gibt, für den \overrightarrow{DS}_t senkrecht zu E steht.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2)					
Summe Teilaufgabe c)		2			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt den Lotfußpunkt des Lotes von S_t auf E .	4			
2	ermittelt die Werte von t , für die der Lotfußpunkt im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe d)		6			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	gibt die Art des Vierecks an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2)					
Summe Teilaufgabe e)		2			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	gibt den Graphen an und begründet seine Angabe.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3)					
Summe Teilaufgabe f)		3			

Summe insgesamt	20			
------------------------	-----------	--	--	--