Name: ____________________

# Beispielaufgabe Abiturprüfung

## (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

*Mathematik, Leistungskurs*

---

## Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

**Aufgabenstellung**

Die *Abbildung 1* zeigt das Viereck $ABCD$ mit $A(0|3|0)$, $B(0|9|0)$, $C(2|8|4)$ und $D(2|4|4)$.

Gegeben sind außerdem die Punkte $S_t(0|6|t)$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

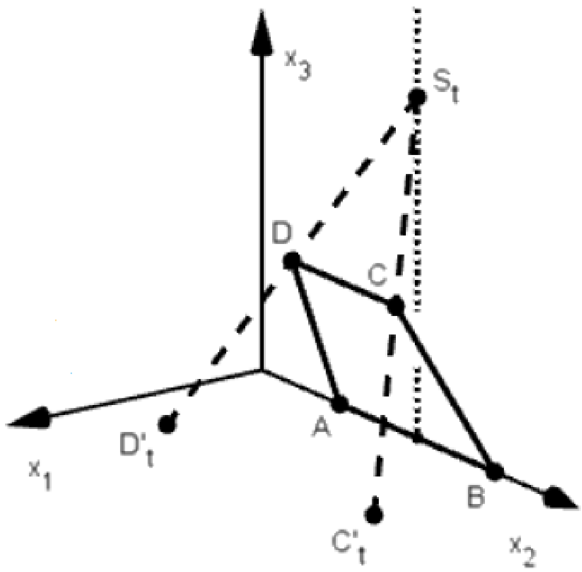


*Abbildung 1*

a) *Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, und dass dieses Trapez kein Rechteck ist.*

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

(3 Punkte)

c) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $E$, in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Koordinatenform.*

[zur Kontrolle: $2x_1 - x_3 = 0$]

(3 Punkte)

Name: ____________________

d) Vom Punkt $S_t$ aus wird das Lot auf die Ebene $E$ gefällt.

*Ermitteln Sie diejenigen Werte von $t$, für die der Lotfußpunkt im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.*

(5 Punkte)

Im Folgenden gilt $t > 4$.

Die Gerade durch die Punkte $S_t$ und $C$ schneidet die $x_1x_2$-Ebene im Punkt $C_t'$, die Gerade durch die Punkte $S_t$ und $D$ schneidet diese Ebene im Punkt $D_t'$ (vgl. Abbildung 1).

e) Die beiden folgenden Gleichungen $I$ und $II$ liefern gemeinsam einen bestimmten Wert von $t$.

$$I \quad \overrightarrow{OS_t} + r \cdot \overrightarrow{S_tC} = \overrightarrow{OC_t'} \text{ mit } C_t'\left(x_1 \mid x_2 \mid 0\right) \qquad II \quad \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC_t'} = 0$$

*Geben Sie die Art des Vierecks $ABC_t'D_t'$ für diesen Wert von $t$ an.*

(2 Punkte)

f) Das Volumen der Pyramide $ABC_t'D_t'S_t$ wird in Abhängigkeit von $t$ durch einen der drei abgebildeten Graphen $G_1$, $G_2$ und $G_3$ in *Abbildung 2* dargestellt.

*Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.*

(3 Punkte)

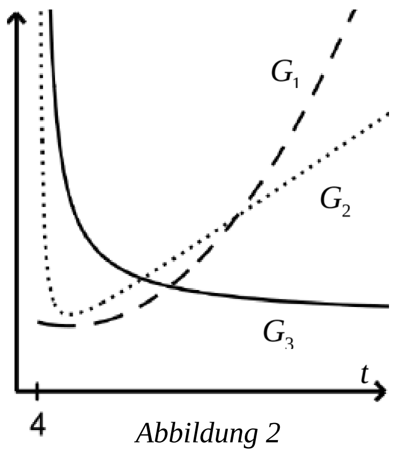


*Abbildung 2*

## Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln" (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

*Unterlagen für die Lehrkraft*

# Beispielaufgabe Abiturprüfung

## (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

*Mathematik, Leistungskurs*

---

## Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

### 1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Vektorielle Geometrie

### 2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

### 3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2023, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2), Aufgabe 2 (MMS)

### 4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

*Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
Analytische Geometrie und Lineare Algebra
- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)
- Lineare Gleichungssysteme

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Modelllösungen

**Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").**

### Teilaufgabe a)

Sowohl $A$ und $B$ als auch $C$ und $D$ haben übereinstimmende $x_1$- und $x_3$-Koordinaten, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind also parallel.

Außerdem gilt $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ sowie $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$.

### Teilaufgabe b)

Mit $F(0\,|\,4\,|\,0)$ ist $\left|\overrightarrow{FD}\right|$ die Höhe des Trapez.

Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right) \cdot \left|\overrightarrow{FD}\right| = 10\sqrt{5}$.

### Teilaufgabe c)

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ liefert nach Wahl von $n_1 = 2$ den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von $E$. Da $E$ den Koordinatenursprung enthält, ergibt sich für die gesuchte Gleichung $2x_1 - x_3 = 0$.

### Teilaufgabe d)

Eine Gleichung der Gerade, die durch $S_t$ verläuft und senkrecht zu $E$ steht, ist

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS_t} + r \cdot \vec{n}$. Mit $2x_1 - x_3 = 0$ ergibt sich als Lotfußpunkt $\left(\frac{2}{5}t \,\middle|\, 6 \,\middle|\, \frac{4}{5}t\right)$.

Dieser liegt für $0 < \frac{2}{5}t < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < t < 5$ im Inneren des Vierecks.

### Teilaufgabe e)

Rechteck

### Teilaufgabe f)

Graph $G_2$

Begründung: Für $t \to 4$ wird der Inhalt der Grundfläche der Pyramide beliebig groß, während die Höhe stets größer als 4 ist. Für $t \to +\infty$ wird die Höhe beliebig groß, während der Inhalt der Grundfläche stets größer ist als der Inhalt des Vierecks mit den Eckpunkten $A$, $B$, $(2|8|0)$ und $(2|4|0)$. Damit wird das Volumen in beiden Fällen beliebig groß.

## 7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____________________________________________

### Teilaufgabe a)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | **EK**[2] | **ZK** | **DK** |
| 1 | weist nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, und dass dieses Trapez kein Rechteck ist. | 4 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… ………………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe a)** | | **4** | | | |

### Teilaufgabe b)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | **EK** | **ZK** | **DK** |
| 1 | berechnet den Flächeninhalt des Vierecks. | 3 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………… ………………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe b)** | | **3** | | | |

### Teilaufgabe c)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | **EK** | **ZK** | **DK** |
| 1 | bestimmt eine Gleichung der Ebene $E$, in der das Viereck $ABCD$ liegt, in Koordinatenform. | 3 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………… ………………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe c)** | | **3** | | | |

---

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

### Teilaufgabe d)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | EK | ZK | DK |
| 1 | ermittelt den Lotfußpunkt des Lotes von $S_t$ auf $E$. | 3 | | | |
| 2 | ermittelt die Werte von $t$, für die der Lotfußpunkt im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt. | 2 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………… …………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe d)** | | **5** | | | |

### Teilaufgabe e)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | EK | ZK | DK |
| 1 | gibt die Art des Vierecks an. | 2 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………… …………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe e)** | | **2** | | | |

### Teilaufgabe f)

| | Anforderungen | Lösungsqualität | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Der Prüfling** | maximal erreichbare Punktzahl | EK | ZK | DK |
| 1 | gibt den Graphen an und begründet seine Angabe. | 3 | | | |
| Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………… …………………………………………………………… | | | | | |
| **Summe Teilaufgabe f)** | | **3** | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Summe insgesamt** | **20** | | | |