Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Ein ICE fährt bis 15:00 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit. Von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr nimmt seine Geschwindigkeit ab. Ab 15:02 Uhr fährt der ICE wieder mit konstanter Geschwindigkeit. Zur modellhaften Beschreibung der Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE im Zeitraum von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird eine Schar ganzrationaler Funktionen betrachtet.

Die Geschwindigkeitsentwicklung von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird zunächst mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f der Schar mit $f(x) = 30x^3 - 90x^2 + 240$ beschrieben.

Dabei ist x die seit 15:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.

Die *Abbildung 1* zeigt für $0 \le x \le 2$ den Graphen von f; außerdem stellt sie die Geschwindigkeiten des ICE vor 15:00 Uhr und nach 15:02 Uhr dar.

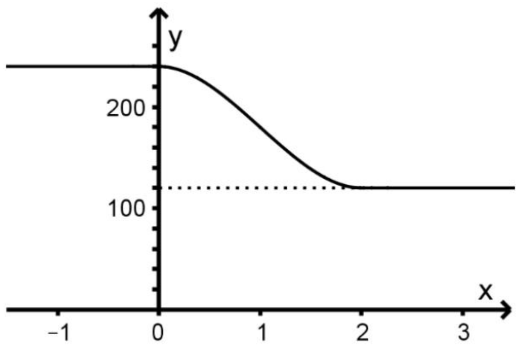

Abbildung 1

(1) *Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die der ICE eine halbe Minute nach* 15:00 *Uhr hat. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute nach* 15:00 *Uhr um einen kleineren Betrag abnimmt als in der darauffolgenden halben Minute.*

Name: ____________________

(2) *Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der ICE in den ersten zwei Minuten nach* 15:00 *Uhr zurücklegt.*

(3) *Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:*

„Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr verändern würde, dann käme der ICE von diesem Zeitpunkt an nach drei Kilometern zum Stehen."

(4 + 3 + 5 Punkte)

b) Nun werden alle in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_p der Schar mit

$$f_p(x) = \frac{p}{4} \cdot x^4 + (30 - p) \cdot x^3 + (\mathrm{p} - 90) \cdot \mathrm{x}^2 + 240 \text{ und } p \in \mathbb{R}$$

daraufhin untersucht, ob sie für $0 \leq x \leq 2$ die Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnten.
Die *Abbildung 2* ist im Vergleich zur *Abbildung 1* um die Graphen G_{-80} und G_{250} der Funktionen f_{-80} bzw. f_{250} ergänzt.

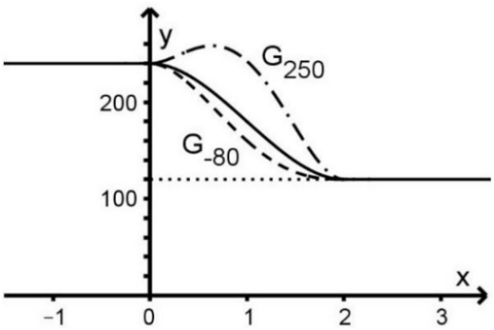

Abbildung 2

(1) Der Übergang von der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr zur Fahrt nach 15:00 Uhr erfolgt sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeit als auch hinsichtlich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit ohne Sprung. Die Funktionen f_p werden diesen beiden Anforderungen gerecht.
Geben Sie die zugehörigen Bedingungen an, die die Funktionen f_p *erfüllen.*

(2) *Beurteilen Sie für jede der Funktionen* f_{-80} *und* f_{250} *mithilfe des zugehörigen Graphen, ob die Funktion die Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von* 15:00 *Uhr bis* 15:02 *Uhr passend beschreiben könnte.*

Name: ____________________

(3) Gegeben sind die folgenden Informationen:

Für $p \neq 0$ liefert $f_p{}'(x) = 0$ neben $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ die Lösung $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$.

Es gilt $x_3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < p \leq 90$ und $x_3 \geq 2 \Leftrightarrow -90 \leq p < 0$.

Beurteilen Sie auch unter Verwendung dieser Informationen die Funktionen f_p mit $p \neq 0$ im Hinblick auf ihre Eignung zur Beschreibung der angenommenen Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 *Uhr bis* 15:02 *Uhr.*

(2 + 2 + 4 Punkte)

c) Betrachtet wird die in $I\!R$ definierte Funktion s mit $s(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + 1$. Die Punkte $E_1(-2 \mid -1)$ und $E_2(2 \mid 3)$ sind direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte des Graphen von s.

(1) *Bestimmen Sie die Werte von a und b.*

[Kontrolllösung: $a = 2$; $b = \frac{\pi}{4}$]

Die Punkte des Graphen von *s* mit der *y*-Koordinate 1 sind die Wendepunkte des Graphen.

(2) *Zeigen Sie, dass jeder Wendepunkt des Graphen von s eine ganzzahlige x-Koordinate hat und dass der Graph von s in jedem seiner Wendepunkte entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$ hat.*

(3) Für jeden Wendepunkt des Graphen von s wird die Gerade betrachtet, die durch diesen Wendepunkt und den Punkt $P(2026 \mid 2026)$ verläuft.

Untersuchen Sie, ob eine dieser Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s ist.

(3 + 4 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2022, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 3 (WTR)

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und Inhaltliche Schwerpunkte
Funktionen und Analysis
- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin\left(b \cdot x + c\right) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5. Zugelassene Hilfsmittel

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(0{,}5) = 221{,}25$

Die Geschwindigkeit beträgt also etwa $220\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$f(0) - f(0{,}5) = 18{,}75$, $f(0{,}5) - f(1) = 41{,}25$

(2) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{60} \cdot \left[\frac{15}{2}x^4 - 30x^3 + 240x\right]_0^2 = 6$

Der ICE legt eine Strecke von 6 km zurück.

(3) $f'(1) = -90$, $f(1) = 180$

Für die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1\ |f(1))$ ergibt sich damit die Gleichung $y = -90x + 270$. Diese Tangente hat die Nullstelle 3 und schließt mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine dreieckige Fläche mit dem Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(1) = 180$ ein. Unter Berücksichtigung der Einheiten kommt der ICE nach $\frac{180}{60}\ \text{km} = 3\ \text{km}$ zum Stehen.

Die Aussage ist also richtig.

Teilaufgabe b)

(1) $f_p(0) = 240$

$f_p'(0) = 0$

(2) Der Graph von f_{250} hat für $0 < x < 2$ einen Extrempunkt, der Graph von f_{-80} nicht. Damit könnte nur f_{-80} die Geschwindigkeitsentwicklung passend beschreiben.

(3) Für $p \neq 0$ nimmt f_p für $-90 \leq p < 0$ und $0 < p \leq 90$ im Bereich $0 < x < 2$ kein Extremum an. Für diese Werte von *p* könnten die Funktionen f_p also die angenommene Geschwindigkeitsentwicklung passend beschreiben.

Teilaufgabe c)

(1) $a = \frac{1}{2} \cdot \left(3 - (-1)\right) = 2$

$b = \frac{\pi}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}\pi$

(2) $s(x) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 4k\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}$

$s'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ liefert für alle $k \in \mathbb{Z}$: $s'(4k) = -\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad s'(4k) = \frac{\pi}{2}$

(3) Die Wendepunkte haben die Koordinaten $(4k \mid 1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit haben die betrachteten Geraden die Steigungen $\frac{2026 - 1}{2026 - 4k}$. Die Tangenten in den Wendepunkten haben entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$. Da $\frac{2026 - 1}{2026 - 4k}$ für jeden Wert von $k \in \mathbb{Z}$ eine rationale Zahl ist, ist keine der Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Geschwindigkeit, die der ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat.	2			
2	(1) zeigt, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute nach 15:00 Uhr um einen kleineren Betrag abnimmt als in der darauffolgenden halben Minute.	2			
3	(2) berechnet die Länge der Strecke, die der ICE in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurücklegt.	3			
4	(3) untersucht die angegebene Aussage auf Richtigkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die zugehörigen Bedingungen an, die die Funktionen f_p erfüllen.	2			
2	(2) beurteilt für jede der Funktionen f_{-80} und f_{250} mithilfe des zugehörigen Graphen, ob die Funktion die Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnte.	2			
3	(3) beurteilt die Funktionen f_p mit $p \neq 0$ im Hinblick auf ihre Eignung zur Beschreibung der angenommenen Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**8**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Werte von a und b.	3			
2	(2) zeigt, dass jeder Wendepunkt des Graphen von s eine ganzzahlige x-Koordinate hat.	2			
3	(2) zeigt, dass der Graph von s in jedem seiner Wendepunkte die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder $+\frac{\pi}{2}$ besitzt.	2			
4	(3) untersucht, ob eine der beschriebenen Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**10**			

Summe insgesamt	**30**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.