Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Für jede reelle Zahl $k>0$ ist durch die Gleichung $f_k(x)=\frac{1}{k}\cdot x^3-6\cdot x^2+9\cdot k\cdot x$, $x\in\mathbb{R}$ eine Funktion f_k gegeben.

a) (1) Die in der folgenden *Abbildung 1* dargestellten Graphen I, II und III gehören jeweils zu einem der Werte $k=0{,}5$, $k=1$ und $k=1{,}5$.

Entscheiden Sie, welcher Wert zu welchem Graphen gehört.

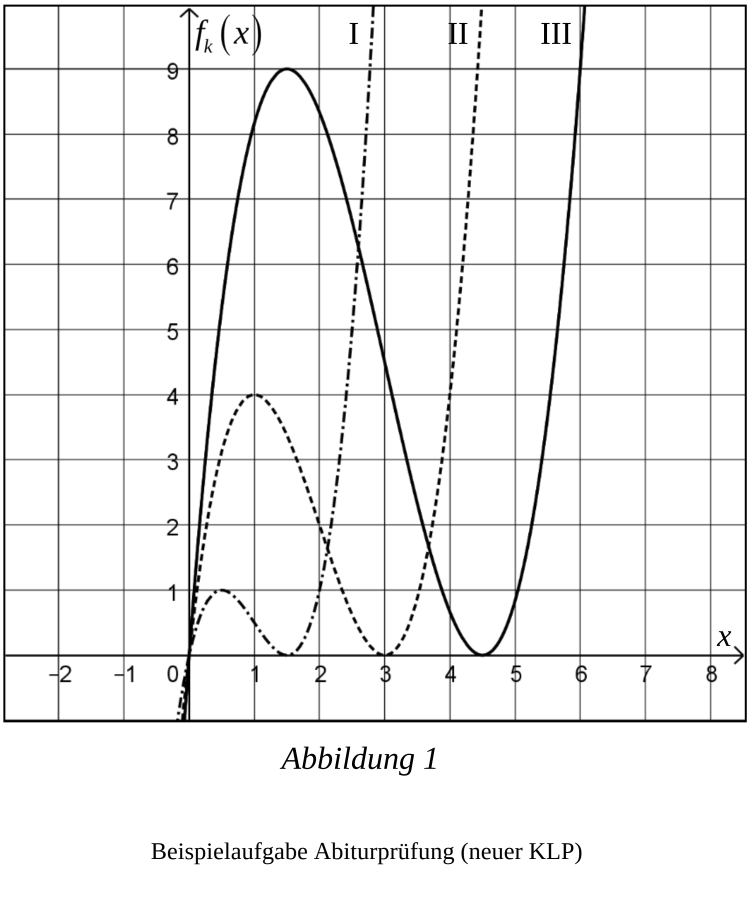

Abbildung 1

Name: ____________________

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von* f_k *in Abhängigkeit von k.*

(3) Die Tangente an den Graphen von f_k in dessen Wendepunkt bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von k.

(2 + 4 + 5 Punkte)

b) Für jede reelle Zahl $k > 0$ ist p_k eine quadratische Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- Die Nullstellen von p_k stimmen mit den Nullstellen von f_k überein.
- Der Scheitelpunkt des Graphen von p_k liegt auf dem Graphen von f_k.

(1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung von* p_k.

[Zur Kontrolle: $p_k(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot k \cdot x$]

(2) Es gilt: $f_k(0) = p_k(0)$ und $f_k(3k) = p_k(3k)$.

Die Graphen von f_k und p_k schließen über dem Intervall $[0;3k]$ genau zwei Flächenstücke ein.

Berechnen Sie $\int_0^{3k} \left(f_k(x) - p_k(x)\right) \mathrm{d}x$ und *interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die Größe der beiden Flächenstücke.*

(3) F_k ist eine Stammfunktion von f_k.

Beurteilen Sie folgende Aussage:

Für jede reelle Zahl $r > 0$ *gilt:* $F_k(r) - F_k(0) > 0$.

(4 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben ist die Funktion *h* mit der Gleichung $h(x) = 4 \cdot \ln(x+1)$ mit maximalem Definitionsbereich.

(1) *Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion h an.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h, die mit der x-Achse einen Winkel von* 30° *einschließt.*

(3) Der Graph von *h* schließt mit der *x*-Achse und der Gerade $x = 3$ eine Fläche ein. Betrachtet werden diejenigen Geraden mit den Gleichungen $y = m \cdot x$, die diese Fläche im Verhältnis $2:1$ teilen. Diese Geraden schneiden die Gerade $x = 3$ unterhalb des Graphen von *h*.
Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von m.

(2 + 3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Teilaufgaben a) und b): nach: Abitur NRW 2021, WbK, Leistungskurs, B2, CAS
Teilaufgabe c): Neuentwicklung durch QUA-LiS NRW

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und Inhaltliche Schwerpunkte
Funktionen und Analysis
- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin\left(b \cdot x + c\right) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $k = 0{,}5 \to \mathrm{I}$; $k = 1 \to \mathrm{II}$; $k = 1{,}5 \to \mathrm{III}$

(2) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \vee x = 3k$

Da zusätzlich $f_k''(k) = -6 < 0$ und $f_k(k) = 4k^2$ sowie $f_k''(3k) = 6 > 0$ und $f_k(3k) = 0$ gilt, folgt damit:

$H_k(k \mid 4k^2)$ ist der lokale Hochpunkt und $T_k(3k \mid 0)$ ist der lokale Tiefpunkt des Graphen von f_k.

(3) $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2k$

Gleichung der Tangente: $y = f_k'(2k) \cdot x + n$ mit $n = f_k(2k) - f_k'(2k) \cdot 2k = 8k^2$

Nullstelle der Tangente: $\frac{8}{3}k$

Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}k \cdot 8k^2 = \frac{32}{3}k^3$

[Hinweis: Da die Existenz der Wendestelle durch die Aufgabenstellung gesichert ist, ist eine Überprüfung mit einem hinreichenden Kriterium nicht erforderlich.]

Teilaufgabe b)

(1) Nullstellen: $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3k$

x-Koordinate des Scheitelpunkts der Parabel: $\frac{0 + 3k}{2} = \frac{3}{2}k$

Ansatz: $p_k(x) = a \cdot x \cdot (x - 3k)$

$p_k\left(\frac{3}{2}k\right) = f_k\left(\frac{3}{2}k\right) \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

$p_k(x) = -\frac{3}{2} \cdot x \cdot (x - 3k) \quad \left[= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}k \cdot x \right]$

(2) $\int_0^{3k} \left(f_k(x) - p_k(x)\right) \mathrm{d}x = 0$

Die Inhalte der beiden Flächenstücke sind gleich.

(3) Es ist $F_k(r) - F_k(0) = \int_0^r f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3k$ und $f_k(k) = 4k^2 > 0$ sowie $f_k(4k) = 16k^2 > 0$.

Somit ist $f_k(x) \geq 0$ für $x > 0$ und damit $F_k(r) - F_k(0) > 0$ für alle $r > 0$.

Teilaufgabe c)

(1) Definitionsbereich von *h*: $]-1;\infty[$

Wertebereich von *h*: $I\!R$

(2) $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} - 1$

$h\left(4\sqrt{3}-1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(4\sqrt{3}-1\right) = 4 \cdot \ln\left(4\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} - 4$

Gleichung der Tangente: $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 4 \cdot \ln\left(4\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} - 4$

(3) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (m \cdot x)\,\mathrm{d}x$ liefert $m = \frac{32}{27} \cdot \ln(4) - \frac{8}{9} \approx 0{,}754$.

$\frac{2}{3} \cdot \int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (m \cdot x)\,\mathrm{d}x$ liefert $m = \frac{64}{27} \cdot \ln(4) - \frac{16}{9} \approx 1{,}508$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ______________________________ Kursbezeichnung: ________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, welcher Wert zu welchem Graphen gehört.	2			
2	(2) berechnet die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von f_k in Abhängigkeit von *k*.	4			
3	(3) ermittelt den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von *k*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt rechnerisch eine Gleichung von p_k.	4			
2	(2) berechnet $\int_0^{3\cdot k}\left(f_k(x)-p_k(x)\right)\mathrm{d}x$.	1			
3	(2) interpretiert das Ergebnis in Bezug auf die Größe der Inhalte der beiden Flächenstücke.	2			
4	(3) beurteilt die Aussage.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion *h* an.	2			
2	(2) bestimmt rechnerisch eine Gleichung der beschriebenen Tangente an den Graphen von *h*.	3			
3	(3) bestimmt die zugehörigen Werte von *m*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

	Summe insgesamt	**30**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.