Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion w mit

$$w(t) = 60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3000}\cdot(t-40)^2}.$$

Abbildung 1 zeigt den Graphen von w für $t \geq 0$.

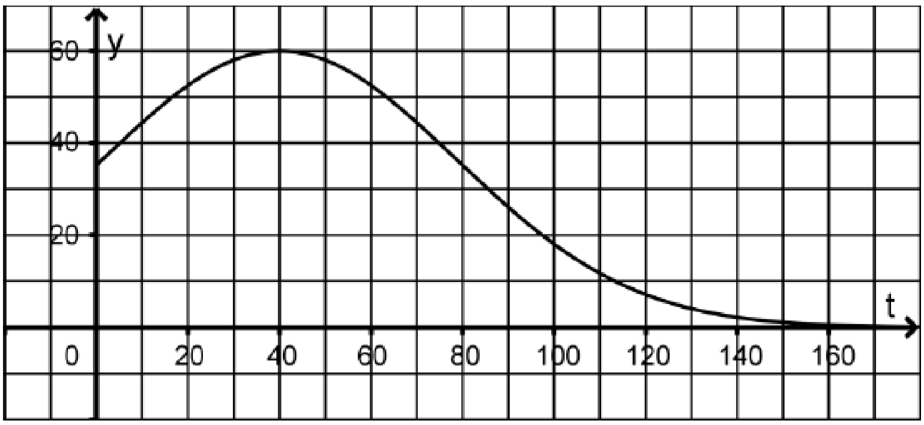


Abbildung 1

(1) Beschreiben Sie, wie der Graph von w aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{3000}\cdot x^2}$ erzeugt werden kann.

(2) Es gilt: $w(40-b) = w(40+b)$ für alle $b \in \mathbb{R}$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

Name: ____________________

Im Oktober des Jahres 2020 wurde auf dem Schulgelände eines Gymnasiums eine Fichte gepflanzt. Am Tag der Pflanzung hatte diese eine Höhe von 120 cm.
Die Wachstumsrate des Höhenwachstums der Fichte in Abhängigkeit von der Zeit wird für $t \geq 0$ durch die Funktion w modelliert.
Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $w(t)$ die Wachstumsrate in Zentimeter pro Jahr $\left(\frac{\text{cm}}{\text{a}}\right)$.

(3) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wachstumsrate im Jahr* 2060 *am größten ist und geben Sie die größte Wachstumsrate an.*

(4) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitraum in Jahren, in dem die Fichte mehr als* $50\ \frac{\text{cm}}{\text{a}}$ *wächst.*

(5) Für einen bestimmten Wert c der Wachstumsrate ist der Zeitraum, in dem diese Wachstumsrate nicht unterschritten wird, genau 30 Jahre lang.
Geben Sie diesen Zeitraum an, berechnen Sie den Wert c und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis in Abbildung 1.

(6) Die Wachstumsrate ist im Jahr 2060 am größten und nimmt danach ab.

Zeigen Sie, dass die momentane Abnahme der Wachstumsrate stets weniger als $1\ \frac{\text{cm}}{\text{a}}$ *pro Jahr beträgt.*

(7) *Geben Sie die Bedeutung des Terms*

$$\frac{1}{100} \cdot \left(120 + \int_0^{60} w(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

im Sachzusammenhang an und begründen Sie ihre Angabe.

(2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Betrachtet werden die $\mathbb{R}$ in definierten Funktionen $f_q : x \mapsto \sin(q \cdot x)$ mit $q \in \mathbb{R}^+$.

(1) *Geben Sie zwei verschiedene Werte von q an, für die* $(3|1)$ *ein Hochpunkt des Graphen von* f_q *ist.*

(2) *Bestimmen Sie den kleinsten Wert von q, für den* $f_q(x) = f_q\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $h:\ q \mapsto \int_0^{\pi} f_q(x)\,\mathrm{d}x$.

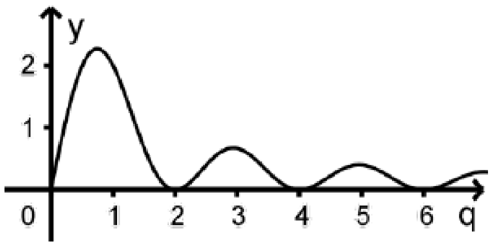


Abbildung 2

(3) *Geben Sie die Lösungen der Gleichung* $h(q) = \frac{1}{2}$ *an.*

(4) *Begründen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:*

I *Zwei beliebige aufeinanderfolgende Nullstellen von h haben den Abstand* 2.

II *Es gilt* $0 \le h(q) \le \frac{2}{q}$.

(3 + 2 + 2 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Teilaufgabe a): nach IQB: Pool für das Jahr 2020, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 2 (CAS), Teilaufgabe 1

Teilaufgabe b): nach IQB: Pool für das Jahr 2019, Mathematik, Erhöhtes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 1 (CAS), Teilaufgabe 2

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und Inhaltliche Schwerpunkte
Funktionen und Analysis

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin\left(b \cdot x + c\right) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Verschiebung um 40 in Richtung der *t*-Achse und Streckung in *y*-Richtung mit dem Faktor 60

(2) Der Graph von *w* ist achsensymmetrisch zur Gerade mit der Gleichung $t = 40$.

(3) $w'(t_H) = 0 \Leftrightarrow t_H = 40,\; w''(40) = -\frac{1}{25} < 0$

Da *w* nur eine Extremstelle hat, ist das lokale Maximum zugleich das absolute Maximum.

$w(40) = 60$

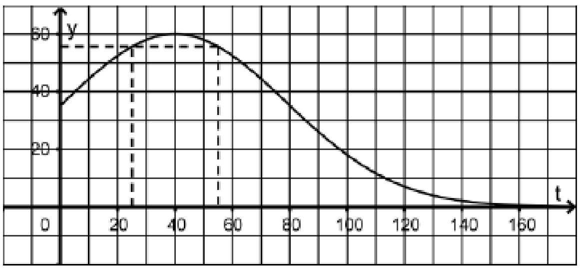
Damit ist die Wachstumsrate mit $60\,\frac{\text{cm}}{\text{a}}$ im Jahr 2060 am größten.

(4) Für $t \geq 0$ liefert $w(t) > 50$ näherungsweise $16{,}6 < t < 63{,}4$.

Zeitraum: 2037 bis 2084

(5) Zeitraum: Oktober 2045 bis Oktober 2075

$c = w(25) = 60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}} \approx 55{,}7$



(6) Der Zeitpunkt der stärksten Abnahme wird durch die Wendestelle $t_W = 40 + 10\sqrt{15}$ von w beschrieben.

Wegen $w'(t_W) \approx -0{,}94$ beträgt die Abnahme stets weniger als $1\,\frac{\text{cm}}{\text{a}}$ pro Jahr.

(7) Der Term gibt die Höhe der Fichte im Oktober des Jahres 2080 in Metern an.

Begründung: 120 ist die Anfangshöhe in Zentimetern, der Wert des Integrals die Änderung der Höhe innerhalb der ersten 60 Jahre nach dem Pflanzen in Zentimetern. Der Faktor $\frac{1}{100}$ führt zu einem Wert in Metern.

Teilaufgabe b)

(1) $q = \frac{\pi}{6}$; $q = \frac{5 \cdot \pi}{6}$

(2) $f_q(x) = f_q\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ gilt genau dann, wenn $\frac{\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten Periode von f_q ist. Der kleinste Wert von q, für den dies der Fall ist, ist 4.

(3) $q \approx 0{,}10$; $q \approx 1{,}57$; $q \approx 2{,}60$; $q \approx 3{,}28$

(4) Es gilt: $h(q) \overset{CAS}{=} \frac{-\cos(\pi \cdot q) + 1}{q}$

I: $h(q) = 0 \Leftrightarrow q = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$

II: Wegen $-1 \leq \cos(\pi \cdot q) \leq 1$, gilt $0 \leq -\cos(\pi \cdot q) + 1 \leq 2$ und damit $0 \leq h(q) \leq \frac{2}{q}$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: ________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt, wie der Graph von *w* aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto e^{-\frac{1}{3000}\cdot x^2}$ erzeugt werden kann.	2			
2	(2) interpretiert die Aussage geometrisch.	2			
3	(3) zeigt rechnerisch, dass die Wachstumsrate im Jahr 2060 am größten ist und gibt die größte Wachstumsrate an.	3			
4	(4) bestimmt rechnerisch den Zeitraum in Jahren, in dem die Fichte mehr als 50 $\frac{\text{cm}}{\text{a}}$ wächst.	2			
5	(5) gibt den Zeitraum an, berechnet den Wert *c* und veranschaulicht sein Ergebnis in *Abbildung 1*.	4			
6	(6) zeigt, dass die momentane Abnahme der Wachstumsrate stets weniger als $1\,\frac{\text{cm}}{\text{a}}$ pro Jahr beträgt.	3			
7	(7) gibt die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an und begründet die Angabe.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**19**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt zwei verschiedene Werte von q an, für die $(3\|1)$ ein Hochpunkt des Graphen von f_q ist.	3			
2	(2) bestimmt den kleinsten Wert von q, für den $f_q(x) = f_q\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.	2			
3	(3) gibt die Lösungen der Gleichung $h(q) = \frac{1}{2}$ an.	2			
4	(4) begründet, dass die beiden Aussagen richtig sind.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

	Summe insgesamt	**30**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.