



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung (auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023) *Mathematik, Grundkurs*

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{4}{3}x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- a) (1) G_f hat zwei Extrempunkte. Zeigen Sie, dass einer der beiden Extrempunkte ein Tiefpunkt mit der x -Koordinate $\sqrt{12}$ ist.

- (2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(6 | f(6))$.

[Zur Kontrolle: $y = \frac{8}{3}x - 16$]

- (3) Die Tangente t hat mit G_f neben P nur den Punkt $Q(-12 | f(-12))$ gemeinsam.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f und t einschließen.

G_f soll in drei Schritten verändert werden. Die drei Schritte sind:

- Spiegeln an der x -Achse
- Verschieben um 6 in positive x -Richtung
- Verschieben um 14 in positive y -Richtung

- (4) Geben Sie an, wie viele verschiedene neue Graphen entstehen, wenn die drei Schritte in allen möglichen Reihenfolgen ausgeführt werden.

Begründen Sie Ihre Angabe.

(4 + 3 + 5 + 4 Punkte)



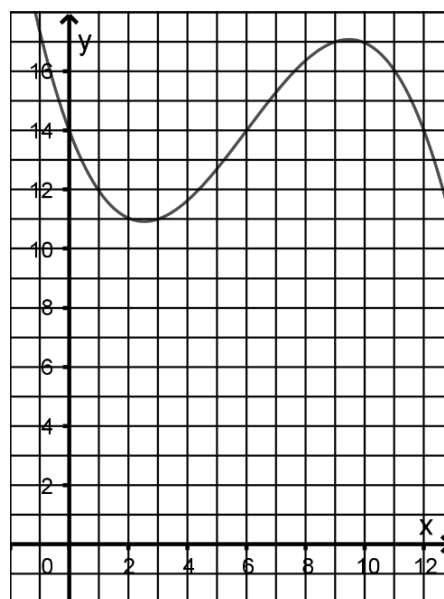
Name: _____

- b) Die *Abbildung* zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = -\frac{1}{27}x \cdot (x-6) \cdot (x-12) + 14.$$

In einem Modell, das aus langjährigen Messungen gewonnen wurde, beschreibt g für $0 \leq x < 12$ den Verlauf der Tagesdurchschnittstemperatur an einem bestimmten Ort.

Dabei ist x die seit einem bestimmten Tag des Kalenderjahres vergangene Zeit in Monaten und $g(x)$ die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$.



Abbildung

- (1) Die folgenden Rechnungen stellen in Verbindung mit der *Abbildung* die Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang dar:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \sqrt{12} \vee x = 6 + \sqrt{12}$$

$$g(6 + \sqrt{12}) - g(6 - \sqrt{12}) \approx 6,2$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

Zur Beschreibung des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperaturen könnte im Modell anstelle von g auch die Funktion h mit $h(x) = -3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 14$ und $0 \leq x < 12$ verwendet werden.

- (2) *Geben Sie die Tagesdurchschnittstemperaturen an, die im Modell unter Verwendung der Funktion h angenommen werden.*
Geben Sie für jede dieser Temperaturen an, wie oft sie angenommen wird.

- (3) *Beurteilen Sie die folgende Aussage:*

Unter Verwendung der Funktion h ist der Zeitraum steigender Tagesdurchschnittstemperatur im Modell sechs Monate lang.

(2 + 4 + 3 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung **(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)** *Mathematik, Grundkurs*

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Aufgabe mit realitätsnahe Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Nach IQB: Pool für das Jahr 2023, Mathematik, Grundlegendes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 4 (WTR)

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5. Zugelassene Hilfsmittel

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}, \quad f''(x) = \frac{2}{9}x$$

Damit gilt $f'(\sqrt{12}) = 0$ und $f''(\sqrt{12}) > 0$.

$$(2) \quad \text{Wegen } f'(6) = \frac{8}{3} \text{ hat die Gleichung die Form } y = \frac{8}{3}x + c.$$

Mit $f(6) = 0$ ergibt sich $\frac{8}{3} \cdot 6 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$.

$$(3) \quad \int_{-12}^6 \left(f(x) - \left(\frac{8}{3}x - 16 \right) \right) dx = \int_{-12}^6 \left(\frac{1}{27}x^3 - 4x + 16 \right) dx = \left[\frac{1}{108}x^4 - 2x^2 + 16x \right]_{-12}^6 = 324$$

- (4) Das Ergebnis der Veränderung ist unabhängig von der Position der Verschiebung in x -Richtung. Wesentlich ist nur die Reihenfolge der beiden anderen Schritte. Abhängig davon geht beispielsweise der Punkt $(0|0)$ durch die drei Schritte entweder in $(6|14)$ oder $(6|-14)$ über. Folglich entstehen zwei verschiedene neue Graphen.

Teilaufgabe b)

- (1) Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten Tagesdurchschnittstemperatur.
- (2) Angenommen werden alle Temperaturen von $11\text{ }^{\circ}\text{C}$ bis $17\text{ }^{\circ}\text{C}$. Die Temperaturen $11\text{ }^{\circ}\text{C}$ und $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ werden jeweils einmal angenommen, alle anderen Temperaturen jeweils zweimal.
- (3) Da der Graph von h gegenüber dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin(x)$ an der x -Achse gespiegelt sowie in x -Richtung mit dem Faktor $\frac{6}{\pi}$ gestreckt, in dieser Richtung aber nicht verschoben ist, nimmt h für $0 \leq x < 12$ das Minimum bei $x = 3$ und das Maximum bei $x = 9$ an, d.h. die Aussage ist richtig.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass einer der beiden Extrempunkte ein Tiefpunkt mit der x -Koordinate $\sqrt{12}$ ist.	4			
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Tangente.	3			
3	(3) berechnet den Inhalt der Fläche, die G_f und t einschließen.	5			
4	(4) gibt an, wie viele verschiedene neue Graphen entstehen, wenn die drei Schritte in allen möglichen Reihenfolgen ausgeführt werden, und begründet seine Angabe.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16)					
Summe Teilaufgabe a)		16			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt eine passende Aufgabenstellung an.	2			
2	(2) gibt die Tagesdurchschnittstemperaturen an, die im Modell unter Verwendung der Funktion h angenommen werden.	2			
3	(2) gibt für jede dieser Temperaturen an, wie oft sie angenommen wird.	2			
4	(3) beurteilt die Aussage.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9)					
Summe Teilaufgabe b)		9			

Summe insgesamt	25			
------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur