Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Ein Unternehmen verkauft Fitnessarmbänder. Die momentane Änderungsrate des Absatzes kann modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 4000x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4x}$ beschrieben werden. Dabei ist x die seit der Produkteinführung vergangene Zeit in Monaten und $f(x)$ die momentane Änderungsrate des Absatzes in Stück pro Monat.

a) (1) *Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, und geben Sie diesen Wert an.*

(2) Im Zeitraum, der mit der Produkteinführung beginnt und 18 Monate später endet, gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten zunimmt, und einen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. Zur Bestimmung dieser Zeitpunkte wurden folgende Berechnungen durchgeführt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$
$$f'''(5) > 0$$

Begründen Sie, dass aus diesen Berechnungen folgt, dass der Zeitpunkt der stärksten Zunahme am Anfang oder am Ende des betrachteten Zeitraums liegen muss.

Name: ____________________

Gleichzeitig mit der Einführung des Fitnessarmbands brachte das Unternehmen eine Smartwatch auf den Markt. Die momentane Änderungsrate des Absatzes der Smartwatch in Stück pro Monat lässt sich im Modell mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto 1600 \cdot x^2 \cdot e^{-0,4x}$ beschreiben.

(3) *Vergleichen Sie die momentanen Änderungsraten des Absatzes für das Fitnessarmband und die Smartwatch fünf Monate nach Produkteinführung.*

(4) *Berechnen Sie die Anzahl der im ersten Jahr nach Produkteinführung insgesamt verkauften Smartwatches.*

(5) *Untersuchen Sie im Modell, ob es einen Zeitpunkt nach Produkteinführung gibt, zu dem die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches übereinstimmt. Geben Sie gegebenenfalls diesen Zeitpunkt an.*

(4 + 4 + 2 + 3 + 3 Punkte)

b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 1,4 \cdot \sin(0,25 \cdot \pi \cdot x) + 1$.

(1) *Geben Sie die Periode von h sowie die Nullstellen von h im Intervall $[0;8]$ an.*

(2) Die Tangente an den Graphen von *h* an der Stelle 3 bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(3) *Begründen Sie, dass der Graph von h symmetrisch zum Punkt $(0|1)$ ist.*

(2 + 4 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung

(auf Grundlage des neuen Kernlehrplans vom 01.08.2023)

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

Teilaufgabe a): nach IQB: Pool für das Jahr 2022, Mathematik, Grundlegendes Anforderungsniveau, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 2 (MMS), Teilaufgabe 1

Teilaufgabe b): Neuentwicklung durch QUA-LiS NRW

4. Bezüge zum Kernlehrplan

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltliche Schwerpunkte
Funktionen und Analysis
- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Ländergemeinsame mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung oder inhaltsgleiche Formelsammlung oder das „Dokument mit mathematischen Formeln“ (ab 2027 verpflichtend) oder mathematische Formelsammlung (bis 2026 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$

$f''(2{,}5) = -1600\mathrm{e}^{-1} < 0$

Da f nur eine Extremstelle hat, ist das lokale Maximum zugleich das absolute Maximum.

$f(2{,}5) \approx 3700$

Damit erreicht die momentane Änderungsrate des Absatzes zweieinhalb Monate nach Produkteinführung mit etwa 3700 Stück pro Monat den größten Wert.

(2) Die Zunahme bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate des Absatzes wird durch f' beschrieben. Die Maximalstelle von f' auf dem Intervall $[0;18]$ ist eine Nullstelle von f'' oder eine Randstelle. Da $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ und $f'''(5) > 0$ liegt an der einzigen Nullstelle von f'' ein Minimum von f' vor. Folglich nimmt f' sein Maximum am Rand des betrachteten Intervalls an.

(3) $f(5) \approx 2707$, $g(5) \approx 5413$

Fünf Monate nach Produkteinführung ist die momentane Änderungsrate des Absatzes für die Smartwatch größer als die für das Armband.

(4) $\int_0^{12} g(x)\,\mathrm{d}x \approx 42900$

(5) Die Gleichung $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x$ hat für $t > 0$ die Lösung t_1 mit $t_1 \approx 4{,}48$.

Etwa viereinhalb Monate nach Produkteinführung stimmt die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches überein.

Teilaufgabe b)

(1) Periode: 8
Die Nullstellen im Intervall $[0;8]$ sind $x_1 \approx 5$ und $x_2 \approx 7$.

(2) Die Tangente hat die Gleichung $t(x) = h'(3)\cdot x + h(3) - 3\cdot h'(3) \approx -0{,}78x + 4{,}32$.
$t(x) = 0$ liefert $x \approx 5{,}56$.
Flächeninhalt des Dreiecks: $\frac{1}{2}\cdot 5{,}56\cdot 4{,}32 \approx 12$

(3) Der Graph von *h* kann durch eine Streckung in *x*-Richtung, eine Streckung in *y*-Richtung und eine anschließende Verschiebung um 1 in *y*-Richtung aus dem zum Koordinatenursprung symmetrischen Graphen der Funktion $x \mapsto \sin(x)$ erzeugt werden.
Die Streckungen haben keinen Einfluss auf eine Symmetrie zum Koordinatenursprung. Aufgrund der Verschiebung ist der Graph von *h* symmetrisch zum Punkt $(0|1)$.

Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, und gibt diesen Wert an.	4			
2	(2) begründet, dass aus den Berechnungen folgt, dass der Zeitpunkt der stärksten Zunahme am Anfang oder am Ende des betrachteten Zeitraums liegen muss.	4			
3	(3) vergleicht die momentanen Änderungsraten des Absatzes für das Fitnessarmband und die Smartwatch fünf Monate nach Produkteinführung.	2			
4	(4) berechnet die Anzahl der im ersten Jahr nach Produkteinführung insgesamt verkauften Smartwatches.	3			
5	(5) untersucht im Modell, ob es einen Zeitpunkt nach Produkteinführung gibt, zu dem die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches übereinstimmt, und gibt diesen Zeitpunkt an.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Periode von *h* an.	1			
2	(1) gibt die Nullstellen von *h* im Intervall $[0;8]$ an.	1			
3	(2) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks.	4			
4	(3) begründet, dass der Graph von *h* symmetrisch zum Punkt $(0\|1)$ ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.