Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einer Anlage zur Getränkeabfüllung werden zwei Maschinen zur Abfüllung von 330 ml-Flaschen betrieben. Bei einer Kontrolle werden je 20 Flaschen stichprobenartig entnommen und die tatsächlichen Füllmengen gemessen. Die Häufigkeiten der auf 1 ml gerundeten Messwerte sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Maschine A

Füllmenge in ml	327	328	329	330	331	332	333
Häufigkeit	1	1	4	9	2	2	1

Maschine B

Füllmenge in ml	327	328	329	330	331	332	333
Häufigkeit	0	2	3	10	3	2	0

a) Um zu beurteilen, ob eine Maschine gut arbeitet, werden der Mittelwert und die Streuung berücksichtigt. Eine Maschine arbeitet umso besser, je näher die Abfüllung im Mittel am Wert 330 ml liegt und je kleiner die Streuung ist.

Für die Maschine A beträgt der Mittelwert 330 ml und die Standardabweichung etwa 1,34 ml.

Beurteilen Sie rechnerisch, welche Maschine besser arbeitet.

(4 Punkte)

Name: ____________________

Eine Flasche, in die gerundet weniger als 330 ml abgefüllt werden, wird im Kontext dieser Aufgabe als Minderbefüllung bezeichnet.

b) In dieser Teilaufgabe wird Maschine A näher betrachtet. Es sollen 100 zufällig ausgewählte Flaschen dieser Maschine untersucht werden. Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Minderbefüllungen“ in einer Stichprobe wird als binomialverteilt angenommen mit $p = 0,3$.

(1) Es sei E das Ereignis: „Es treten genau 25 Minderbefüllungen auf“.
Entscheiden Sie, welcher der folgenden Ansätze zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E genutzt werden kann und erläutern Sie die einzelnen Bestandteile dieses ausgewählten Ansatzes.

(I) $P(E) = 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(II) $P(E) = \binom{100}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(III) $P(E) = \frac{100}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(IV) $P(E) = 25 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,7$

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis* „Es treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.“

(3 + 2 Punkte)

c) In dieser Teilaufgabe wird Maschine B näher betrachtet. In den Herstellerangaben für Maschine B steht, dass mit 30 % Minderbefüllungen gerechnet werden kann. Der verantwortliche Maschinenmeister hat die Vermutung, dass die Maschine B eigentlich besser arbeitet als angegeben. Mit der Wahl von $H_0:\ p \geq 0,3$ als Nullhypothese möchte er seine Vermutung in einer Stichprobe von 100 Flaschen überprüfen. Die Anzahl der Minderbefüllungen in der Stichprobe wird wiederum als binomialverteilt angenommen.

(1) *Ermitteln Sie eine zur Nullhypothese passende Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau* von $\alpha = 0,05$.

(2) *Beschreiben Sie den Fehler* 2. *Art im Sachzusammenhang.*

(4 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Der Getränkehersteller schafft eine weitere Maschine an. Im Folgenden wird die Füllmenge nicht gerundet betrachtet. Es wird davon ausgegangen, dass die Füllmengen aller Flaschen jeweils unabhängig voneinander sind. Die stetige Zufallsgröße Y: „Füllmenge einer zufällig ausgewählten in dieser Maschine abgefüllten Flasche“ wird normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 331$ [ml] und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}34$ [ml] angenommen. Eine Befüllung mit höchstens 327 ml wird im Folgenden als gravierende Minderbefüllung bezeichnet.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Flasche mit höchstens* 327 ml *befüllt wurde, also eine gravierende Minderbefüllung ist.*
Geben Sie Ihr Ergebnis auf fünf Nachkommastellen gerundet an.
[Kontrolllösung mit vier Nachkommastellen: 0,0014]

(2) *Ermitteln Sie die durchschnittlich zu erwartende Anzahl von gravierenden Minderbefüllungen in einer Stichprobe von* 1500 *Flaschen.*

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von* 750 *Flaschen mehr als zwei gravierende Minderbefüllungen enthält.*

(4) Der Getränkehersteller ändert die Parameter der Maschine so, dass $\mu_{neu} = 330$ [ml] und $\sigma_{neu} = 1{,}00$ [ml] gilt.
Interpretieren Sie die veränderten Parameter im Sachkontext.
Beurteilen Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist, durch die Änderung der Parameter verändert.

(2 + 2 + 2 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. Medien/ Materialien
   - Entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Es ist $\overline{x}_B = \dfrac{2\cdot 328 + 3\cdot 329 + 10\cdot 330 + 3\cdot 331 + 2\cdot 332}{20} = 330\ \text{[ml]} = \overline{x}_A$, daher wird die Streuung in Form der Standardabweichung untersucht.

Es ist $s_A \approx 1{,}34\ \text{[ml]}$ und $s_B = \sqrt{\dfrac{2\cdot(330-328)^2 + \ldots + 2\cdot(330-332)^2}{20}} \approx 1{,}05\ \text{[ml]}$.

Daher kommt man aufgrund der Stichprobe zu dem Urteil, dass Maschine *B* besser arbeitet.

Teilaufgabe b)

(1) Für die Berechnung des Ereignisses kann [ausschließlich] der Ansatz (II) verwendet werden. Dabei steht $P(E)$ für die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses E.
Der Binomialkoeffizient $\binom{100}{25}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, wie die 25 Minderbefüllungen bei den 100 Flaschen verteilt sein können. $0{,}3^{25}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für 25 Minderbefüllungen und $0{,}7^{75}$ die Wahrscheinlichkeit für 75 nicht minderbefüllte Flaschen an.

(2) [Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$.]
Es ist $P_{100;0,3}(X < 30) = P_{100;0,3}(X \le 29) \approx 0{,}462$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 46,2 % treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße X_2: „Anzahl der Minderbefüllungen in der Stichprobe“ ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$.
Definiere z.B. eine Funktion *f* mit $f(a) = P_{100;0,3}(X_2 \le a)$, $0 \le a \le 100$ und bestimme die Lösung der Gleichung $f(a) = 0{,}05$. Der TR liefert $a \approx 23$ [für $0 \le a \le 100$].

Es gilt $P_{100;0,3}(X_2 \le 22) \approx 0{,}048 < 0{,}05$ und $P_{100;0,3}(X_2 \le 23) \approx 0{,}076 > 0{,}05$.

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall: Verwirf die Nullhypothese, falls $X_2 \le 22$, also 22 oder weniger Flaschen Minderbefüllungen sind.

(2) Ein Fehler 2. Art wird begangen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Ausgangs des Zufallsexperimentes beibehalten wird, obwohl sie in Wirklichkeit aber falsch ist. Der Maschinenmeister würde nun also fälschlicherweise davon ausgehen, dass die Maschine tatsächlich nicht so gut, wie von ihm vermutet, arbeitet.

Teilaufgabe d)

(1) Y ist normalverteilt mit $\mu = 331$ [ml] und $\sigma = 1{,}34$ [ml].
Es ist $P(Y \le 327) \approx 0{,}00142$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,142 %.

(2) Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl gravierender Minderbefüllungen in einer Stichprobe von n Flaschen an. Z ist binomialverteilt mit $n = 1500$ und $p = 0{,}00142$.
Für den Erwartungswert von Z gilt: $E(Z) = n \cdot p = 1500 \cdot 0{,}00142 = 2{,}13$.

In der Stichprobe kann man durchschnittlich zwei gravierende Minderbefüllungen erwarten.

(3) Z ist nun binomialverteilt mit $n = 750$ und $p = 0{,}00142$.
$P_{750;0,00142}(Z \ge 3) \approx 0{,}0925 = 9{,}25\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 9,25 %.

(4) Da $\mu_{neu} = 330$ [ml], kann der Getränkehersteller bei der Befüllung der Flaschen Ressourcen sparen. Die Flaschen werden aber auch genauer befüllt, da $\sigma_{neu} = 1{,}00$ [ml].

Y ist nun normalverteilt mit $\mu_{neu} = 330$ [ml] und $\sigma_{neu} = 1{,}00$ [ml].

Die Wahrscheinlichkeit für eine Befüllung unter 327 ml sinkt auf

$P_{neu}(Y \le 327) \approx 0{,}00135\ [= 0{,}135\%]$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Mittelwert.	1			
2	bestimmt die Standardabweichung.	2			
3	beurteilt, welche Maschine besser arbeitet.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**4**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet sich für den richtigen Ansatz.	1			
2	(1) erläutert die einzelnen Bestandteile des Ansatzes.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine zur Nullhypothese passende Entscheidungsregel.	4			
2	(2) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………….… ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit und gibt diese auf fünf Nachkommastellen gerundet an.	2			
2	(2) ermittelt die durchschnittlich zu erwartende Anzahl von gravierenden Minderbefüllungen in der Stichprobe.	2			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe mehr als zwei gravierende Minderbefüllungen enthält.	2			
4	(4) interpretiert die veränderten Parameter im Sachkontext.	2			
5	(4) beurteilt, wie sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche eine gravierende Minderbefüllung ist, durch die Änderung der Parameter verändert.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………….… ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**10**			

Summe insgesamt	**25**			