Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Abbildung 1

In Bottrop im Ruhrgebiet steht auf einer Kohle-Abraumhalde das Kunstwerk „Haldenereignis Emscherblick“ – im Folgenden kurz als Kunstwerk bezeichnet (siehe *Abbildung 1*).
Das Kunstwerk hat die Form einer Pyramide, die von vier gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt wird (regelmäßiges Tetraeder). Eines der Dreiecke bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Kantenlänge beträgt jeweils 60 m. Das Kunstwerk steht auf vier 9 m hohen Betonpfeilern. Um das Kunstwerk begehen zu können, sind in die Konstruktion Treppen und Aussichtsplattformen eingearbeitet.

Name: ____________________

Vereinfachend wird das Kunstwerk im Folgenden durch eine näherungsweise regelmäßige Pyramide *ABCD* mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten modelliert. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* (siehe *Abbildung 2*), welches die Grundfläche der Pyramide bildet. Die Eckpunkte der Pyramide haben in diesem Modell die Koordinaten

$$A\ (35\,|\,0\,|\,0);\ B\ (-17\,|\,30\,|\,0);\ C\ (-17\,|\,-30\,|\,0);\ D\ (0\,|\,0\,|\,49).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Modell einem Meter [m].

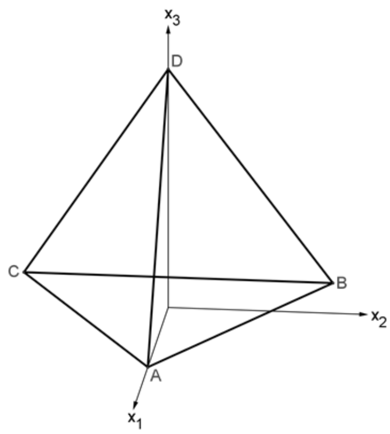

Abbildung 2

a) (1) *Begründen Sie, dass die Grundfläche ABC der Pyramide in der* x_1x_2*-Ebene liegt.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, und C näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge* 60 [m] *sind.*

(2 + 4 Punkte)

b) Die Eckpunkte *B*, *C* und *D* liegen in der Ebene E_{BCD}.

Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Ebene E_{BCD} *in Koordinatenform.*

[Zur Kontrolle: $E_{BCD}: \quad -49 \cdot x_1 + 17 \cdot x_3 = 833$.]

(4 Punkte)

c) *Beurteilen Sie die Aussage, dass die Ebene* E_{BCD} *parallel zur* x_2*-Achse liegt.*

(2 Punkte)

Name: ____________________

d) Die erste kreisförmige Aussichtsplattform soll durch einen Kreis mit dem Mittelpunkt $Q\ (-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ modelliert werden, der parallel zur x_1x_2-Ebene liegt.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_{BCD}.

(3 Punkte)

e) Die Besuchertreppe vom Boden zur ersten Plattform wird im ersten Treppenstück durch einen Abschnitt der Geraden *g* modelliert, der in $P\ (16\ |-20|\ -9)$ beginnt und ins Innere der Pyramide verläuft. Die Gerade *g* ist gegeben durch

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}16\\-20\\-9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix},\quad s\in I\!R.$$

Die Gerade *g* durchstößt die Grundfläche *ABC* der Pyramide im Punkt *T*.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T und bestimmen Sie die Länge des Treppenstückes, welches sich bei dieser Modellierung außerhalb der Pyramide befindet.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt *T* innerhalb der Dreiecksfläche *ABC* liegt, wird nicht erwartet.]

(5 Punkte)

f) Es wird angenommen, die Besuchertreppe soll durch eine neue Treppe ersetzt werden.
Die Planungen sehen vor, dass der Steigungswinkel der neuen Treppe gegenüber der x_1x_2–Ebene dabei 30° betragen soll.
In einem ersten Vorschlag wird die neue Treppe ausgehend vom Punkt $Q\ (-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ auf der ersten Plattform (vgl. Abbildung 1) als Teil einer Geraden der Schar g_a modelliert:

$$g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}-8{,}5\\15\\9\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\a\end{pmatrix},\quad r\in I\!R,\ a\in I\!R.$$

Bestimmen Sie die Werte von a, so dass eine durch g_a modellierte Treppe die Planungen erfüllt.

(5 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. Medien/Materialien
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die drei Eckpunkte *A*, *B* und *C* besitzen alle die x_3-Koordinate Null und liegen somit in der x_1x_2–Ebene.

(2)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -52 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{52^2 + 30^2} \approx 60,0 .$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right| = 60 .$$

Damit ist das Dreieck *ABC* näherungsweise gleichseitig mit der Kantenlänge 60 [m].

Teilaufgabe b)

$E_{BCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -30 \\ 49 \end{pmatrix}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$ ist eine Parametergleichung der Ebene.

Die Orthogonalitätsbedingungen $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -30 \\ 49 \end{pmatrix} = 0$ liefern $n_2 = 0$

und $17n_1 + 49n_3 = 0$ bzw. $n_1 = -\frac{49}{17} n_3$.

Es folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$ als ein Normalenvektor von E_{BCD}. Mit $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 833$ ergibt

sich die Koordinatengleichung: $E_{BCD}: \; -49 \cdot x_1 + 17 \cdot x_3 = 833$.

Teilaufgabe c)

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{BCD} steht senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der in Richtung der x_2-Achse zeigt.

Somit ist die Aussage richtig, die Ebene E_{BCD} liegt parallel zur x_2-Achse.

Teilaufgabe d)

$$E_{BCD}: \quad -49 \cdot x_1 + 17 \cdot x_3 = 833 \quad \text{mit} \quad \left| \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2690}\ .$$

Für den Abstand d der Ebene zum Punkt $Q\ (-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ gilt:

$$d = \left| \frac{-49 \cdot (-8{,}5) + 17 \cdot 9 - 833}{\sqrt{2690}} \right| \approx 5{,}08 \quad [\text{m}]$$

Teilaufgabe e)

Die Ebene E_{ABC} liegt in der x_1x_2–Ebene.
Daher muss die x_3-Koordinate des Punktes T auf der Geraden g Null betragen.

$$-9 + s \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} = 4{,}5\ .$$

Einsetzen von $s = 4{,}5$ in die Geradengleichung liefert die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + 4{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T\ (2{,}5\ |{-2}\ |\ 0).$$

Für die Länge des gesuchten Treppenstücks gilt somit:

$$\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left| \begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = 4{,}5 \cdot \sqrt{29} \approx 24{,}23 \quad [\text{m}].$$

Teilaufgabe f)

Der Steigungswinkel der Treppe entspricht dem Winkel zwischen einer Geraden der Schar g_a und der x_1x_2–Ebene. Es gilt in Abhängigkeit vom Parameter a:

$$\sin(30°) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt{25 + a^2} \cdot 1}$$

$[\Leftrightarrow \quad 0{,}5 \cdot \sqrt{25 + a^2} = |a| \quad \Rightarrow 0{,}25 \cdot (25 + a^2) = a^2 \;]$

$\Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{\tfrac{25}{3}} \approx \pm 2{,}89$.

[Auch ein elementargeometrischer Ansatz ist denkbar, z.B. $\tan(30°) = \frac{|a|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$].

[Da der Winkel einer Geraden zur x_1x_2–Ebene bestimmt wird und der Parameter a nur in die x_3-Koordinate eingeht, sind offensichtlich beide Lösungen gültig.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Grundfläche *ABC* in der x_1x_2-Ebene liegt.	2			
2	(2) zeigt, dass die Punkte *A*, *B* und *C* näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge 60 [m] sind.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Ebene E_{BCD} in Koordinatenform.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**4**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beurteilt die Aussage, dass die Ebene E_{BCD} parallel zur x_2-Achse liegt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**2**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_{BCD}.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………..... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**3**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Koordinaten des Punktes T.	3			
2	bestimmt die Länge des Treppenstückes, welches sich außerhalb der Pyramide befindet.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………..... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe e)		**5**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die zugehörigen Werte von a.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………..... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe f)		**5**			

Summe insgesamt		**25**			