Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Abbildung 1

In Bottrop im Ruhrgebiet steht auf einer Kohle-Abraumhalde das Kunstwerk „Haldenereignis Emscherblick" – im Folgenden kurz als Kunstwerk bezeichnet (siehe *Abbildung 1*). Das Kunstwerk hat die Form einer Pyramide, die von vier gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt wird (regelmäßiges Tetraeder). Eines der Dreiecke bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Kantenlänge beträgt jeweils 60 m. Das Kunstwerk steht auf vier 9 m hohen Betonpfeilern. Um das Kunstwerk begehen zu können, sind in die Konstruktion Treppen und Aussichtsplattformen eingearbeitet.

Name: ____________________

Vereinfachend wird das Kunstwerk im Folgenden durch eine näherungsweise regelmäßige Pyramide *ABCD* mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten modelliert. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* (siehe *Abbildung 2*), welches die Grundfläche der Pyramide bildet. Die Eckpunkte der Pyramide haben in diesem Modell die Koordinaten

$$A(35|0|0);\ B(-17|30|0);\ C(-17|-30|0);\ D(0|0|49).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Modell einem Meter (m).

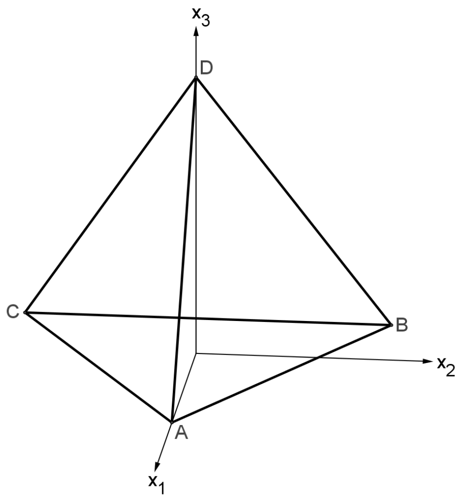

Abbildung 2

a) (1) *Begründen Sie, dass die Grundfläche ABC der Pyramide in der* x_1x_2 *-Ebene liegt.*

(2) Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks *ABC* haben Längen von jeweils ungefähr 60 [m].

Zeigen Sie, dass auch die Seite $\overline{AC}$ *näherungsweise eine Länge von* 60 [m] *hat.*

(1 + 2 Punkte)

b) Die Eckpunkte *B*, *C* und *D* liegen in der Ebene E_{BCD}.

Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Ebene E_{BCD} *in Koordinatenform.*

[Zur Kontrolle: $E_{BCD}: \quad -49 \cdot x_1 + 17 \cdot x_3 = 833$.]

(4 Punkte)

Name: ____________________

c) Die erste kreisförmige Aussichtsplattform soll durch einen Kreis mit dem Mittelpunkt $Q(-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ modelliert werden, der parallel zur x_1x_2-Ebene liegt.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_{BCD}.

(3 Punkte)

d) Die Besuchertreppe vom Boden zur ersten Plattform wird im ersten Treppenstück durch einen Abschnitt der Gerade *g* modelliert, der in $P(16\,|\,-20\,|\,-9)$ beginnt und ins Innere der Pyramide verläuft. Die Gerade *g* ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade *g* durchstößt die Grundfläche *ABC* der Pyramide im Punkt *T*.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T und bestimmen Sie die Länge des Treppenstückes, welches sich bei dieser Modellierung außerhalb der Pyramide befindet.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt *T* innerhalb der Dreiecksfläche *ABC* liegt, wird nicht erwartet.]

(5 Punkte)

e) Es wird überlegt, die Besuchertreppe durch eine neue Treppe zu ersetzen. Die Planungen sehen vor, dass der Steigungswinkel der neuen Treppe gegenüber der x_1x_2–Ebene 30° betragen soll.

In einem ersten Vorschlag wird die neue Treppe ausgehend vom Punkt $Q(-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ auf der ersten Plattform (vgl. *Abbildung 1*) als Teil einer Gerade g_a der Schar modelliert:

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8{,}5 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Werte von a, so dass eine durch g_a modellierte Treppe die Planungen erfüllt.

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Die drei Eckpunkte *A*, *B* und *C* besitzen alle die x_3-Koordinate Null und liegen somit in der x_1x_2–Ebene.

(2) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -52 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{52^2 + 30^2} \approx 60{,}0$.

Teilaufgabe b)

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 17 \\ -30 \\ 49 \end{pmatrix}$ sind zwei Spannvektoren von E_{BCD} .

Die Orthogonalitätsbedingungen $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -30 \\ 49 \end{pmatrix} = 0$ liefern

$-60n_2 = 0 \Leftrightarrow n_2 = 0$ und $17n_1 + 49n_3 = 0 \Leftrightarrow n_1 = -\frac{49}{17}n_3$.

Wahl von $n_3 = 17$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E_{BCD} .

Mit $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 833$ ergibt sich die Koordinatengleichung:

$E_{BCD} : -49 \cdot x_1 + 17 \cdot x_3 = 833$.

Teilaufgabe c)

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} -49 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2690}\,.$$

Für den Abstand d der Ebene zum Punkt $Q(-8{,}5\,|\,15\,|\,9)$ gilt:

$$d = \left|\frac{-49\cdot(-8{,}5)+17\cdot 9-833}{\sqrt{2690}}\right| \approx 5{,}08\ \text{[m]}.$$

Teilaufgabe d)

Da die Grundfläche ABC in der x_1x_2–Ebene liegt, muss die x_3-Koordinate des Punktes T auf der Gerade g Null sein.

$$-9 + s\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} = 4{,}5\,.$$

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + 4{,}5\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(2{,}5\,|\,-2\,|\,0)\,.$$

Für die Länge des gesuchten Treppenstücks gilt somit:

$$\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left|\begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = 4{,}5\cdot\sqrt{29} \approx 24{,}23\,\text{[m]}\,.$$

Teilaufgabe e)

Der Steigungswinkel der Treppe entspricht dem Winkel zwischen einer Gerade g_a der Schar und der x_1x_2 –Ebene. Es gilt in Abhängigkeit vom Parameter a:

$$\sin(30°) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\\a\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt{25+a^2}\cdot 1}$$

$[\Leftrightarrow 0{,}5\cdot\sqrt{25+a^2} = |a| \Leftrightarrow 0{,}25\cdot\left(25+a^2\right) = a^2]$

$\Leftrightarrow a = -\sqrt{\frac{25}{3}} \approx -2{,}89 \vee a = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2{,}89$.

[Auch ein elementargeometrischer Ansatz ist denkbar, z.B. $\tan(30°) = \frac{|a|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$].

[Da der Winkel einer Gerade zur x_1x_2 –Ebene bestimmt wird und der Parameter a nur in die x_3-Koordinate eingeht, sind offensichtlich beide Lösungen gültig.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) begründet, dass die Grundfläche *ABC* in der x_1x_2-Ebene liegt.	1			
2	(2) zeigt, dass die Seite $\overline{AC}$ näherungsweise eine Länge von 60 [m] hat.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**3**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Ebene E_{BCD} in Koordinatenform.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_{BCD}.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ……………………………………………………………….… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**3**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Koordinaten des Punktes T.	3			
2	bestimmt die Länge des Treppenstückes, welches sich außerhalb der Pyramide befindet.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die zugehörigen Werte von a.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe e)		**5**			

Summe insgesamt	**20**			