Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von **ganzrationalen** Funktionen f_k durch die Funktionsgleichung

$$f_k(x) = e^{-k} \cdot ((x-k)^3 - 3 \cdot (x-k) + k^2),\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } k \geq -0{,}5.$$

Die Graphen von f_k für $k = -0{,}5$, $k = 1$ und $k = 2$ sind in der *Abbildung 1* dargestellt.

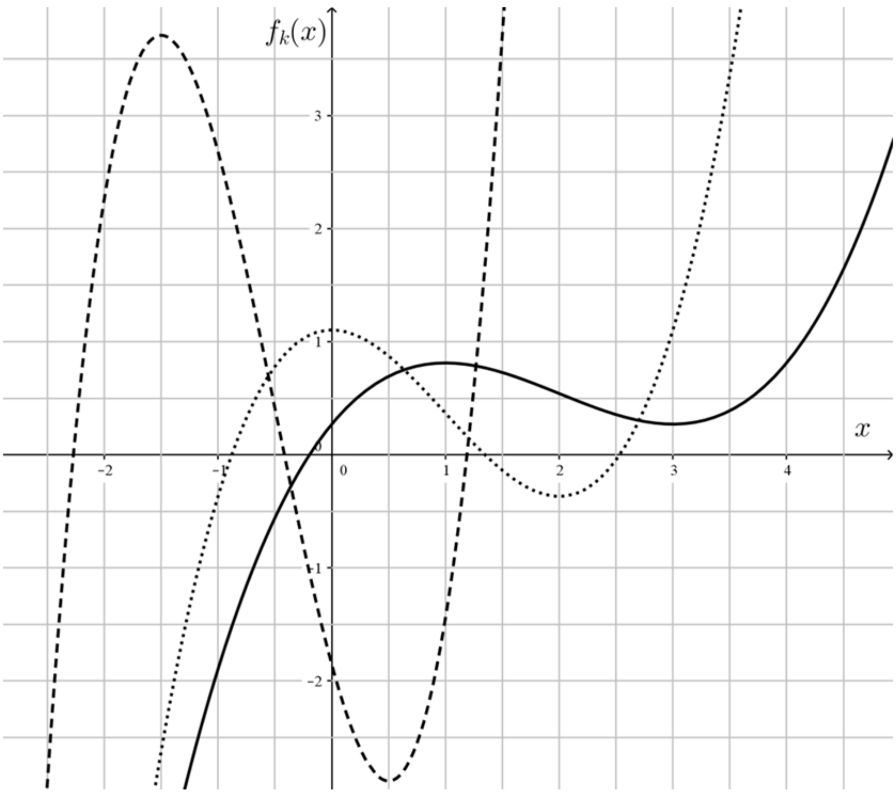


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Skizzieren Sie den Graphen von* f_0 *im Intervall* $[-2;2]$ *in Abbildung 1.*

(2) Der Graph von f_0 schließt mit der x-Achse im zweiten Quadranten die Fläche A_0 ein.
Bestimmen Sie rechnerisch die Größe dieser Fläche.
[Zur Kontrolle: $A_0 = 2{,}25$ FE]

(3) Gegeben ist die Gerade g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -2x$, $x \in I\!R$.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche A_0 *aus* (2) *teilt.*

(2 + 5 + 4 Punkte)

b) Der lokale Hochpunkt des Graphen von f_k ist in Abhängigkeit von k gegeben durch
$H_k(k-1 \mid e^{-k} \cdot (2+k^2))$.

Ermitteln Sie den Wert von k mit $-0{,}5 \le k \le 10$, *für den der Abstand des Hochpunktes* H_k *zum Ursprung minimal ist.*

(4 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von* f_k *in Abhängigkeit von* k .
[Zur Kontrolle: Für die x-Koordinate des Wendpunktes gilt $x_W = k$.]

Auf dem Graphen der Funktion w mit $w(x) = e^{-x} \cdot x^2$, $x \ge -0{,}5$ liegen die Wendepunkte der Graphen von f_k mit $k \ge -0{,}5$. Den Graphen von w nennt man Ortskurve der Wendepunkte der Funktionenschar.

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch das globale Maximum von w.*
Hierbei darf ohne Nachweis $w''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x}$ verwendet werden.

(3) Gegeben sei die Funktion j mit der Gleichung $j(x) = 3 \cdot e^{-(x-2)} \cdot (x-2)^2$, $x \in I\!R$.
Der Graph dieser Funktion ist die Ortskurve der Wendepunkte einer weiteren Funktionenschar v_k mit $k \in IR$.
Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktionenschar v_k *an.*

(5 + 7 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Im Folgenden wird die Abkühlung eines Bechers Kaffee bei einer Raumtemperatur von 18 °C in Abhängigkeit von der Zeit untersucht. Dazu wird die Temperatur des Kaffees in Grad Celsius in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten bestimmt. Die Tabelle gibt zwei der Messergebnisse an.

Zeit in Minuten	1	10
Temperatur in Grad Celsius	71	51

d) Der Abkühlvorgang in den ersten 10 Minuten soll durch eine Funktion u_1 mit $u_1(t) = a + b \cdot e^{-c \cdot t}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ mit $0 \le t \le 10$ modelliert werden.

Dabei gibt u_1 die Temperatur des Kaffees in Grad Celsius an und t die Zeit seit Beginn der Untersuchung in Minuten.

Begründen Sie, dass $a = 18$ *gilt und bestimmen Sie dann die Werte von b und c ausgehend von den Angaben in der Tabelle.*
[Kontrolllösung mit gerundeten Werten: $u_1(t) = 18 + 55{,}86 \cdot e^{-0{,}053 \cdot t}$]

(5 Punkte)

Nach 10 Minuten wird dem Kaffee kalte Milch zugefügt und die Temperatur der Mischung im Anschluss daran noch weitere 15 Minuten gemessen. Zum Zeitpunkt $t = 11$ liegt bereits eine gleichmäßige Kaffee-Milch-Mischung vor.

e) Für den Zeitraum $11 \le t \le 25$ also für den Zeitraum nach der Zugabe der kalten Milch lässt sich der Abkühlvorgang der Mischung näherungsweise durch die Funktion u_2 mit $u_2(t) = 18 + 36 \cdot e^{-0{,}033 \cdot t}$, $11 \le t \le 25$ modellieren.

Dabei gibt u_2 die Temperatur der Mischung in Grad Celsius und t die Zeit in Minuten seit Beginn der Untersuchung an. Der Graph von u_2 ist monoton fallend.

(1) *Bestimmen Sie, wie lange es ab dem Zeitpunkt* $t = 11$ *dauert, bis die Temperatur im Kaffeebecher unter* 41 °C *sinkt.*

(2) *Bestimmen Sie die mittlere Temperaturänderung des Kaffees im Zeitraum* $0 \le t \le 10$ *vor der Milchzugabe und im Zeitraum* $11 \le t \le 21$ *nach der Milchzugabe.*
Vergleichen Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

(2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien:*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

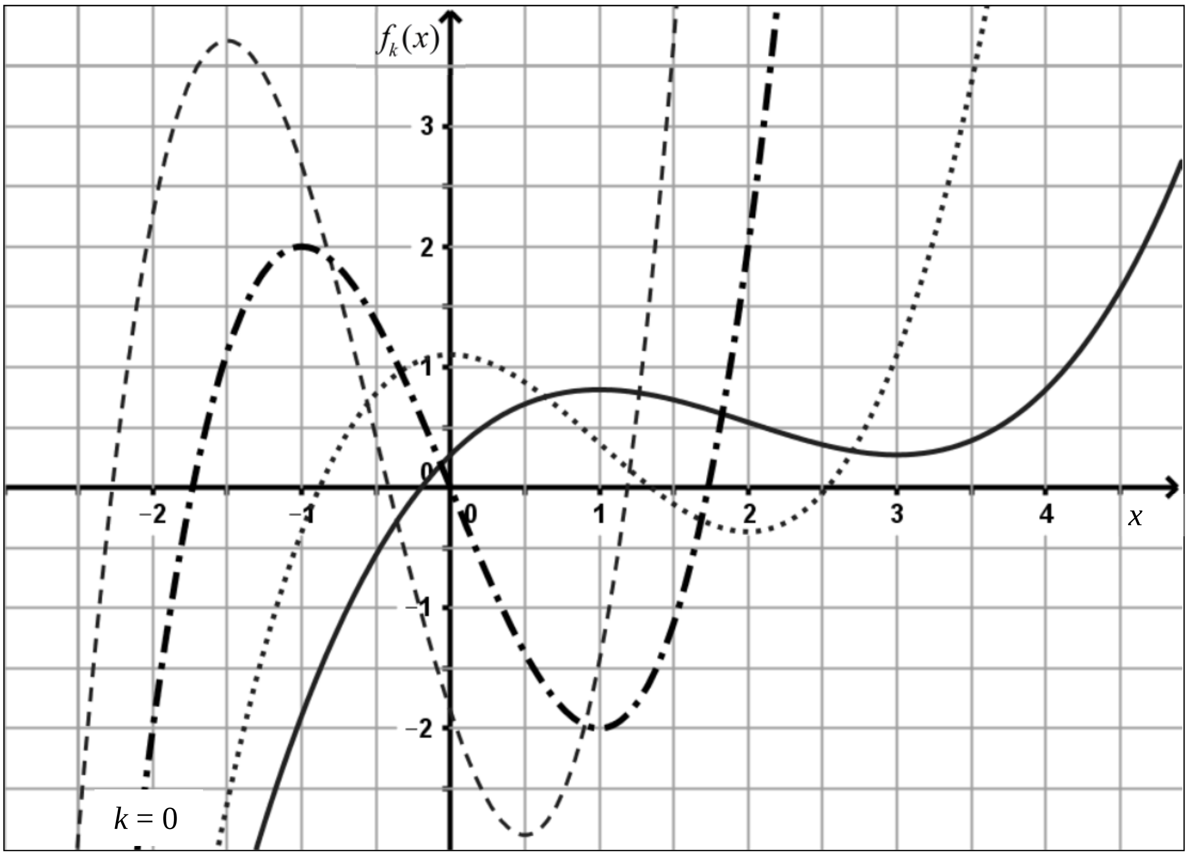
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $f_0(x) = x^3 - 3x$.



(2) Nullstellen von f_0 : $f_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$.

Wegen $f_0(-1) = 2$ liegt die im zweiten Quadranten eingeschlossene Fläche oberhalb der x-Achse.

F_0 mit $F_0(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von f_0 .

Die Größe der eingeschlossenen Fläche im zweiten Quadranten ist durch

$A_0 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} f_0(x)\,\mathrm{d}x = [F_0(x)]_{-\sqrt{3}}^{0} = F_0(0) - F_0(-\sqrt{3}) = 2{,}25$ [FE] berechenbar.

(3) Die Schnittstellen der Graphen von f_0 und g sind -1, 0 und 1.

Man erkennt in der Abbildung, dass die Gerade somit von -1 bis 0 unterhalb des Graphen von f_0 verläuft.

Für die Größe der von den Graphen von f_0 und g im zweiten Quadranten eingeschlossenen Fläche gilt somit $\int\limits_{-1}^{0} (f_0(x) - g(x))\mathrm{d}x = 0{,}25$.

$\frac{0{,}25}{2{,}25} = \frac{1}{9}$. Das Verhältnis der beiden Teilflächen ist 8:1.

Teilaufgabe b)

Für den gesuchten Abstand gilt: $d(k) = \sqrt{\left(k-1\right)^2 + \left(e^{-k} \cdot \left(2 + k^2\right)\right)^2}$.

Gesucht ist der Wert k mit $-0{,}5 \le k \le 10$, für den der Abstand $d(k)$ minimal ist.

Der Taschenrechner liefert $k \approx 1{,}3$.

[Auch eine grafische Analyse des Graphen von d mit dem Taschenrechner ist vorstellbar.]

Teilaufgabe c)

(1) Es gilt $f_k{}'(x) = e^{-k} \cdot (3 \cdot (x-k)^2 - 3)$, $f_k{}''(x) = e^{-k} \cdot 6 \cdot (x-k)$ und $f_k{}'''(x) = 6 \cdot e^{-k}$.

Die für eine Wendestelle von f_k notwendige Bedingung $f_k{}''(x) = 0$ ist für $x = k$ erfüllt.

Mit $f_k{}'''(k) > 0$ und $f_k(k) = e^{-k} \cdot k^2$ hat f_k den Wendepunkt $W_k(k \mid e^{-k} \cdot k^2)$.

(2) $w'(x) = (-1) \cdot x^2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x)$.

Die für lokale Extremstellen von w notwendige Bedingung $w'(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x) = 0$ ist für $x = 0$ und $x = 2$ erfüllt.

Wegen $w''(0) = 2 > 0$ und $w''(2) = -2e^{-2} < 0$ und $w(2) = 4e^{-2}$ hat w den lokalen Hochpunkt $H(2 \mid 4e^{-2})$.

Da es nur die zwei berechneten lokalen Extremstellen gibt und der lokale Hochpunkt bei der rechten Extremstelle liegt, reicht die Betrachtung des Funktionswertes an der linken Randstelle.

Mit $w(-0{,}5) = e^{0,5} \cdot (-0{,}5)^2 \approx 0{,}41 < 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54$ ist $4e^{-2}$ das globale Maximum.

(3) Eine Funktionsgleichung von v_k ist gegeben durch

$v_k(x) = 3 \cdot f_k(x-2) \qquad \left[= 3 \cdot e^{-k} \cdot \left(\left(x-2-k\right)^3 - 3 \cdot \left(x-2-k\right) + k^2\right)\right]$.

Teilaufgabe d)

Langfristig nähert sich die Temperatur des Kaffees der Umgebungstemperatur von 18 °C an. Somit gilt für c > 0: $\lim\limits_{t\to\infty} u_1(t) = a = 18$.

$$u_1(1) = 71 \quad \Leftrightarrow \quad 71 = 18 + b \cdot e^{-c\cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad 53 = b \cdot e^{-c} \;,$$

$$u_1(10) = 51 \quad \Leftrightarrow \quad 51 = 18 + b \cdot e^{-c\cdot 10} \quad \Leftrightarrow \quad 33 = b \cdot e^{-10c} \;,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{33}{53} = e^{-9c} \quad \overset{GTR}{\Rightarrow} \quad c \approx 0{,}053.$$

Aus $53 = b \cdot e^{-0{,}053}$ folgt $b \approx 55{,}86$ und damit $u_1(t) = 18 + 55{,}86 \cdot e^{-0{,}053\cdot t}$.

Teilaufgabe e)

(1) $u_2(t) = 18 + 36 \cdot e^{-0{,}033\cdot t} = 41 \quad \overset{GTR}{\Rightarrow} \quad t \approx 13{,}6$.

Ab dem Zeitpunkt t = 11 dauert es etwa 2,6 Minuten, bis die Temperatur des Kaffees unter 41 °C sinkt.

(2)

$$\frac{u_1(10) - u_1(0)}{10 - 0} \approx -2{,}30 \left[{}^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}\right],$$

$$\frac{u_2(21) - u_2(11)}{21 - 11} \approx -0{,}70 \left[{}^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}\right].$$

Die mittlere Temperaturänderung des Kaffees pro Minute vor der Milchzugabe ist deutlich größer als die mittlere Temperaturänderung der Mischung nach der Milchzugabe.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) skizziert den Graphen von f_0 in Abbildung 1.	2			
2	(2) bestimmt die erforderlichen Nullstellen als Integrationsgrenzen und gibt eine Stammfunktion an.	3			
3	(2) bestimmt rechnerisch die Größe der Fläche.	2			
4	(3) bestimmt die Größe der von den Graphen von f_0 und g eingeschlossenen Fläche im zweiten Quadranten.	3			
5	(3) bestimmt das Verhältnis, in dem die Gerade die Fläche A_0 teilt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Wert von k, für den der Abstand des Hochpunktes zum Ursprung minimal ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**4**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die erforderlichen Ableitungen an.	2			
2	(1) bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k.	3			
3	(2) gibt einen Funktionsterm von w' an und bestimmt die möglichen Extremstellen mit einer notwendigen Bedingung.	3			
4	(2) bestätigt den lokalen Hochpunkt mit einer hinreichenden Bedingung und gibt den Funktionswert an.	2			
5	(2) berücksichtigt die Randstelle und bestimmt das globale Maximum von w.	2			
6	(3) gibt eine Funktionsgleichung dieser Funktionenschar an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass $a = 18$ gilt.	1			
2	bestimmt die Werte von b und c .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, wie lange es ab dem Zeitpunkt $t = 11$ dauert, bis die Temperatur unter 41 °C sinkt.	2			
2	(2) bestimmt die mittleren Temperaturänderungen des Kaffees in den angegebenen Zeiträumen.	3			
3	(2) vergleicht die Ergebnisse im Sachkontext.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………….… ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe e)		**6**			

Summe insgesamt	**40**			