Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

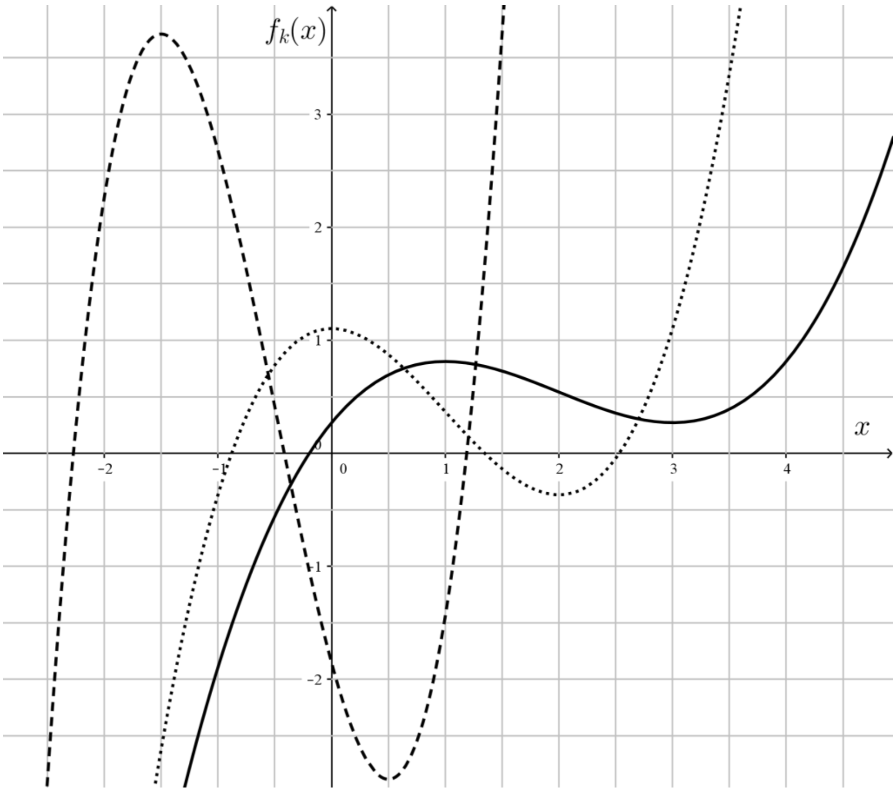
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Schar von **ganzrationalen** Funktionen f_k durch die Funktionsgleichung

$$f_k(x) = \mathrm{e}^{-k} \cdot \left((x-k)^3 - 3 \cdot (x-k) + k^2 \right),\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } k \geq -0{,}5 .$$

In der folgenden *Abbildung* sind die Graphen von f_k für $k = -0{,}5$, $k = 1$ und $k = 2$ dargestellt.



Abbildung

Name: ____________________

a) (1) *Skizzieren Sie den Graphen von* f_0 *im Intervall* $[-2;2]$ *in der Abbildung.*

(2) Der Graph von f_0 schließt mit der x-Achse im zweiten Quadranten eine Fläche ein.

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt A_0 *dieser Fläche.*

[Zur Kontrolle: $A_0 = 2{,}25\,\text{FE}$.]

(3) Gegeben ist die Gerade $g: y = -2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche aus (2) teilt.

(2 + 3 + 4 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von* f_k *in Abhängigkeit von k.*

[Zur Kontrolle: Für die x-Koordinate x_w des Wendepunktes gilt: $x_w = k$.]

Die Wendepunkte der Graphen von f_k mit $k \geq -0{,}5$ liegen auf dem Graphen der Funktion w mit $w(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot x^2$, $x \geq -0{,}5$. Den Graphen von w nennt man Ortskurve der Wendepunkte der Funktionenschar.

(2) (i) *Zeigen Sie:* $w'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(-x^2 + 2x\right)$.

(ii) *Bestimmen Sie rechnerisch das globale Maximum von w.*

(3) Gegeben ist die Funktion w_{neu} mit der Gleichung

$$w_{\text{neu}}(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-(x-2)} \cdot (x-2)^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von w_{neu} ist die Ortskurve der Wendepunkte einer weiteren Schar von Funktionen v_k mit $k \geq -0{,}5$.

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung von v_k *an.*

(3 + 7 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Im Folgenden wird die Abkühlung eines Bechers Kaffee bei einer Raumtemperatur von 18 °C in Abhängigkeit von der Zeit untersucht. Dazu wird die Temperatur des Kaffees in Grad Celsius (°C) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten bestimmt. Die Tabelle gibt zwei der Messergebnisse an.

Zeit in Minuten	1	10
Temperatur in °C	71	51

c) Der Abkühlvorgang in den ersten 10 Minuten soll für $0 \le t \le 10$ durch eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion u_1 mit $u_1(t) = a + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot t}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ modelliert werden.

Dabei gibt t die Zeit in Minuten seit Beginn der Untersuchung und $u_1(t)$ die Temperatur des Kaffees in °C an.

Begründen Sie, warum bei der Modellierung $a = 18$ gewählt wird, und berechnen Sie dann die Werte von b und c ausgehend von den Angaben in der Tabelle.

[Kontrolllösung mit gerundeten Werten: $u_1(t) = 18 + 55{,}86 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}053 \cdot t}$.]

(5 Punkte)

Nach 10 Minuten wird dem Kaffee kalte Milch zugefügt und die Temperatur der Mischung im Anschluss daran noch weitere 15 Minuten gemessen. Nach 11 Minuten liegt bereits eine gleichmäßige Kaffee-Milch-Mischung vor.

d) Für $11 \le t \le 25$ lässt sich der Abkühlvorgang der Mischung näherungsweise durch die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion u_2 mit $u_2(t) = 18 + 36 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}033 \cdot t}$ modellieren.

Dabei gibt t wieder die Zeit in Minuten seit Beginn der Untersuchung und $u_2(t)$ die Temperatur der Mischung in °C an. Der Graph von u_2 ist monoton fallend.

Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur des Kaffees in den ersten 10 *Minuten der Untersuchung und die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur der Mischung von der* 11. *bis zur* 21. *Minute der Untersuchung.*

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(4 Punkte)

Name: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

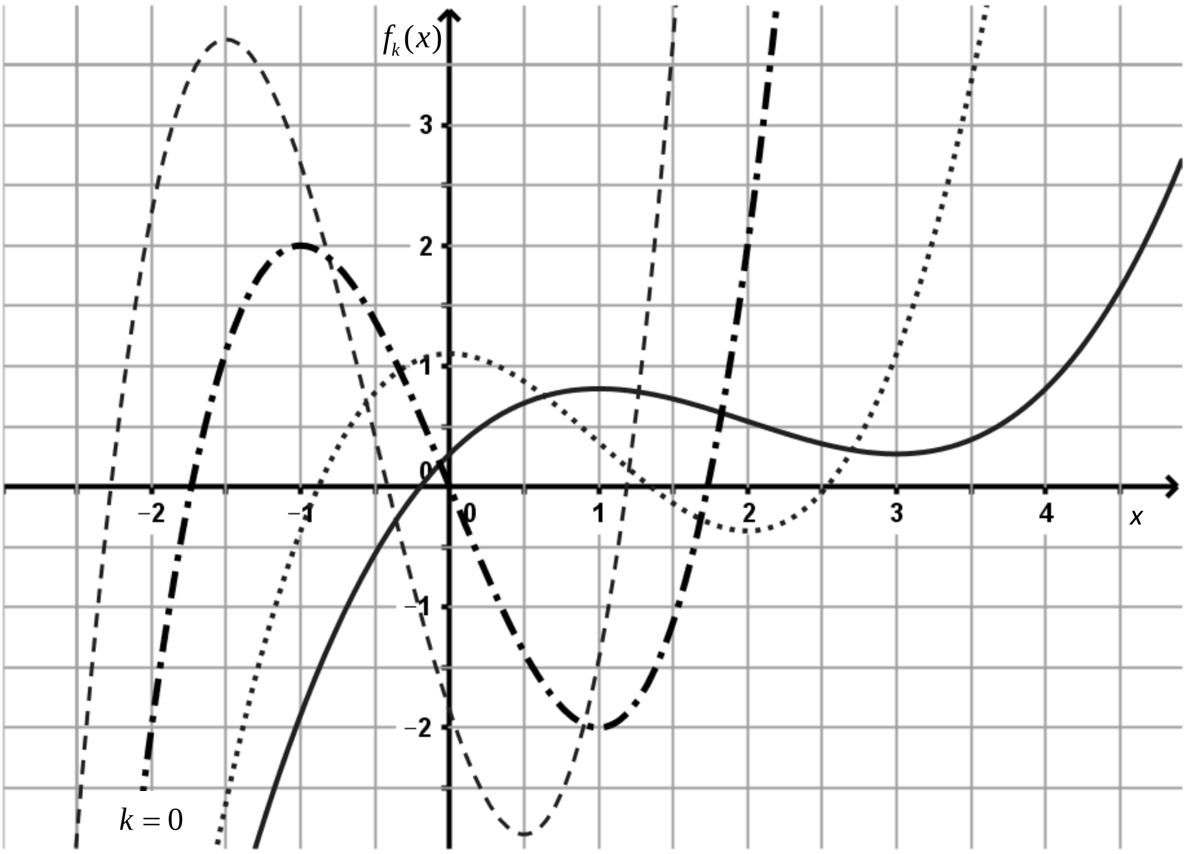
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $f_0(x) = x^3 - 3x$.



(2) Nullstellen von f_0: $f_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$.

$$A_0 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 2{,}25 \text{ [FE].}$$

(3) Die Schnittstellen des Graphen von f_0 und der Gerade g sind -1, 0 und 1.

Im Bereich von -1 bis 0 verläuft die Gerade g unterhalb des Graphen von f_0.

Der Inhalt der vom Graphen von f_0 und der Gerade g im zweiten Quadranten eingeschlossenen Fläche beträgt somit $\int_{-1}^{0}\left(f_0(x)-(-2x)\right)\mathrm{d}x=0{,}25$ [FE].

$\frac{0{,}25}{2{,}25}=\frac{1}{9}$. Das Verhältnis der beiden Teilflächen ist 8:1.

Teilaufgabe b)

(1) $f_k'(x)=\mathrm{e}^{-k}\cdot\left(3\cdot(x-k)^2-3\right)$ und $f_k''(x)=\mathrm{e}^{-k}\cdot 6\cdot(x-k)$.

$f_k''(x)=0$ liefert die Wendestelle $x=k$.

Mit $f_k(x)=\mathrm{e}^{-k}\cdot k^2$ hat der Graph von f_k den Wendepunkt $W_k\left(k\,|\,\mathrm{e}^{-k}\cdot k^2\right)$.

[Hinweis: Da die Existenz der Wendestelle durch den Aufgabentext gesichert ist, ist eine Überprüfung mit einem hinreichenden Kriterium nicht notwendig.]

(2) (i) $w'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\cdot x^2+\mathrm{e}^{-x}\cdot 2x=\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(-x^2+2x\right)$.

(ii) Die absoluten Extrema von w können nur an den Nullstellen von w' oder an den Rändern des Definitionsbereichs auftreten.

$w'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

Zusätzlich gilt: $w(-0{,}5)=\frac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\approx 0{,}41$, $w(0)=0$, $w(2)=4\cdot\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}54$ und $w(x)\to 0$ für $x\to\infty$.

Folglich ist $4\cdot\mathrm{e}^{-2}$ das globale Maximum von w.

(3) $v_k(x)=3\cdot f_k(x-2)$.

Teilaufgabe c)

Für $t \to \infty$ gilt $u_1(t) \to a$, da $c > 0$.

Da die die Temperatur des Kaffees sich langfristig der Umgebungstemperatur von 18 °C annähert, wird $a = 18$ gewählt.

$$\left.\begin{array}{l} u_1(1) = 71 \quad \Leftrightarrow \quad 71 = 18 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad 53 = b \cdot \mathrm{e}^{-c} \\ u_1(10) = 51 \quad \Leftrightarrow \quad 51 = 18 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot 10} \quad \Leftrightarrow \quad 33 = b \cdot \mathrm{e}^{-10c} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{33}{53} = \mathrm{e}^{-9c} \quad \overset{\text{GTR}}{\Rightarrow} \quad c \approx 0{,}053.$$

Aus $53 = b \cdot \mathrm{e}^{-0{,}053}$ folgt $b \approx 55{,}86$ und damit $u_1(t) = 18 + 55{,}86 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}053 \cdot t}$.

Teilaufgabe d)

$$\frac{u_1(10) - u_1(0)}{10 - 0} \approx -2{,}30 \left[{}^{\circ}\mathrm{C}/_{\mathrm{min}}\right].$$

$$\frac{u_2(21) - u_2(11)}{21 - 11} \approx -0{,}70 \left[{}^{\circ}\mathrm{C}/_{\mathrm{min}}\right].$$

Die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur des Kaffees vor der Milchzugabe ist deutlich größer als die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur der Mischung nach der Milchzugabe.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) skizziert den Graphen von f_0 in der *Abbildung*.	2			
2	(2) bestimmt rechnerisch den Inhalt A_0 der Fläche.	3			
3	(3) bestimmt den Inhalt der Fläche, die im zweiten Quadranten vom Graphen von f_0 und der Gerade g eingeschlossen wird.	3			
4	(3) bestimmt das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche teilt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k.	3			
2	(2) (i) zeigt: $w'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(-x^2 + 2x\right)$.	2			
3	(2) (ii) bestimmt rechnerisch das globale Maximum von w.	5			
4	(3) gibt eine mögliche Funktionsgleichung von v_k an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, warum $a = 18$ gewählt wird.	1			
2	berechnet die Werte von b und c .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die durchschnittlichen Änderungsraten der Temperatur.	3			
2	vergleicht die Ergebnisse.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**4**			

Summe insgesamt	**30**			