Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Abbildung 1

In Bottrop im Ruhrgebiet steht auf einer Kohle-Abraumhalde das Kunstwerk „Haldenereignis Emscherblick“ – im Folgenden kurz als Kunstwerk bezeichnet (siehe *Abbildung 1*).
Das Kunstwerk hat die Form einer Pyramide, die von vier gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt wird (regelmäßiges Tetraeder). Eines der Dreiecke bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Kantenlänge beträgt jeweils 60 m. Das Kunstwerk steht auf vier 9 m hohen Betonpfeilern. Um das Kunstwerk begehen zu können, sind in die Konstruktion Treppen und Aussichtsplattformen eingearbeitet.

Name: ____________________

Vereinfachend wird das Kunstwerk im Folgenden durch eine näherungsweise regelmäßige Pyramide *ABCD* mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten modelliert. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* (siehe *Abbildung 2*), welches die Grundfläche der Pyramide bildet. Die Eckpunkte der Pyramide haben in diesem Modell die Koordinaten

$$A\ (35\,|\,0\,|\,0);\ B\ (-17\,|\,30\,|\,0);\ C\ (-17\,|\,-30\,|\,0);\ D\ (0\,|\,0\,|\,49).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Modell einem Meter [m].

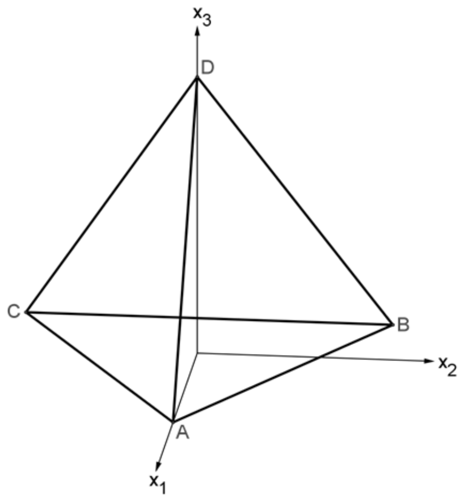

Abbildung 2

a) (1) *Begründen Sie, dass die Grundfläche ABC der Pyramide in der* x_1x_2 *-Ebene liegt.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, und C näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge* 60 [m] *sind.*

(3) *Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene* E_{ABC} *an, die die dreieckige Grundfläche ABC der Pyramide enthält.*

(2 + 4 + 1 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Besuchertreppe vom Boden zur ersten Plattform wird im ersten Treppenstück durch einen Abschnitt der Geraden g modelliert, der in $P\ (16\,|\,-20\,|\,-9)$ beginnt und ins Innere der Pyramide verläuft. Die Gerade g ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

(1) Die Gerade g durchstößt die Grundfläche ABC der Pyramide im Punkt T.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T und bestimmen Sie die Länge des Treppenstückes, welches sich bei dieser Modellierung außerhalb der Pyramide befindet.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt T innerhalb der Dreiecksfläche ABC liegt, wird nicht erwartet.]

(2) *Stellen Sie eine Gleichung der Strecke $\overline{AC}$ in Parameterform auf.*
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q auf der Geraden g, der sich genau vertikal unterhalb der Kante $\overline{AC}$ befindet auf zwei Nachkommastellen genau.
[Kontrolllösung mit einer Nachkommastelle: $Q\ (11{,}3\,|\,-13{,}7\,|\,-5{,}9)$.]

(3) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$.*

(5 + 6 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung bis 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
Analytische Geometrie und Lineare Algebra
- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt

2. Medien/Materialien
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die drei Eckpunkte *A*, *B* und *C* besitzen alle die x_3-Koordinate Null und liegen somit in der x_1x_2–Ebene.

(2)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-52\\30\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-52\\-30\\0\end{pmatrix}\quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{52^2+30^2}\approx 60{,}0$$

$$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}\quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right|=60\,.$$

Damit ist das Dreieck *ABC* näherungsweise gleichseitig mit der Kantenlänge 60 [m].

(3) Bestimmung einer Parameterform der Ebene E_{ABC}:
Da die Ebene E_{ABC} in der x_1x_2–Ebene liegt, kann sofort auf folgende Parameterform geschlossen werden:

$$E_{ABC}:\quad \vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad r,t\in\mathbb{R}.$$

Teilaufgabe b)

(1) Die Ebene E_{ABC} liegt in der x_1x_2–Ebene.
Daher muss die x_3-Koordinate des Punktes *T* auf der Geraden *g* Null betragen.

$$-9+s\cdot 2=0\Leftrightarrow s=\frac{9}{2}=4{,}5\,.$$

Einsetzen von s = 4,5 in die Geradengleichung liefert die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + 4{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; T\,(2{,}5 \,|\, -2 \,|\, 0).$$

Für die Länge des gesuchten Treppenstücks gilt somit:

$$\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left|\begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = 4{,}5 \cdot \sqrt{29} \approx 24{,}23 \quad [\mathrm{m}].$$

(2) Aufstellen der Gleichung der Strecke $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -52 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le t \le 1\,.$$

In der beschriebenen Situation müssen die x_1- und x_2-Koordinaten der Kante $\overline{AC}$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.

Aus diesem Ansatz ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 35 - 52 \cdot t &= 16 - 3 \cdot s \\ 0 - 30 \cdot t &= -20 + 4 \cdot s \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; s = \dfrac{235}{149} \approx 1{,}58$ und $t = \dfrac{68}{149} \approx 0{,}46$ mit $0 < t < 1$.

Einsetzen von s in g liefert für die Koordinaten des gesuchten Punktes auf der Geraden g. Näherungsweise gilt: $Q\;(11{,}27 \,|\, -13{,}69 \,|\, -5{,}85)$.

(3) Der vertikal darüber liegende Punkt auf der Kante $\overline{AC}$ hat näherungsweise die Koordinaten: (11,27|-13,69|0).

Der Abstand des Punktes Q vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$ beträgt somit ungefähr 5,85 [m].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Grundfläche *ABC* in der x_1x_2-Ebene liegt.	2			
2	(2) zeigt, dass die Punkte *A*, *B* und *C* näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge 60 [m] sind.	4			
3	(3) gibt eine Parametergleichung der Ebene E_{ABC} an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten des Punktes *T*.	3			
2	(1) bestimmt die Länge des Treppenstückes, welches sich außerhalb der Pyramide befindet.	2			
3	(2) stellt eine Gleichung der Strecke $\overline{AC}$ in Parameterform auf.	2			
4	(2) bestimmt die Koordinaten des Punktes *Q* auf der Geraden *g*.	4			
5	(3) bestimmt den Abstand des Punktes *Q* vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**13**			

Summe insgesamt	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur