Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

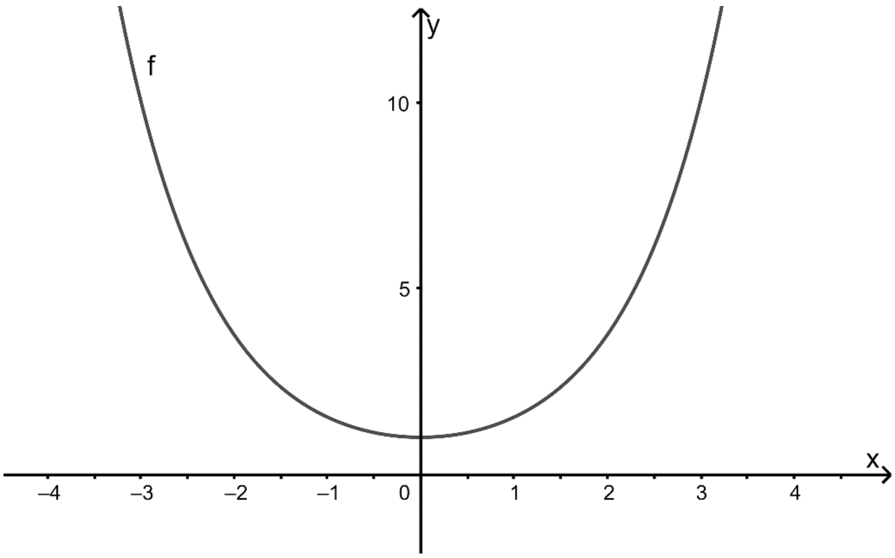
Mathematik, Grundkurs

weitere (kurze) Analysisaufgabe

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$. Der Graph von f ist in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) (1) Der Punkt P ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse. Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von f und hat die x-Koordinate $\ln(2)$.

Geben Sie die Koordinaten von P und Q an und ermitteln Sie eine Gleichung der Sekante durch P und Q.

(2) *Begründen Sie, dass der Graph von f keine Nullstellen besitzt.*

(4 + 1 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Zeigen Sie, dass* $f''(x) = f(x)$ *gilt und interpretieren Sie diese Aussage in Bezug auf die maximal mögliche Anzahl von Wendepunkten des Graphen von f.*

(2) *Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Extrempunkte.*

(3) *Zeigen Sie, dass* $f(x) = f(-x)$ *gilt und interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.*

(4) *Bestimmen Sie die Länge des Intervalls, in dem* $f(x) \leq 10$ *gilt.*

(3 + 3 + 2 + 2 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f über dem Intervall* [-3;3] *und ermitteln Sie den Anteil dieser Fläche an der Fläche des Rechtecks ABCD mit den Eckpunkten* $A(-3|0)$, $B(3|0)$, $C(3|10)$ *und* $D(-3|10)$.

(2) *Ermitteln Sie das Intervall* [-*a*;*a*], *so dass der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f in diesem Intervall* 40 [FE] *beträgt.*

(3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

weitere (kurze) Analysisaufgabe

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien:*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f(0)=1 \quad \Rightarrow \quad P(0\,|\,1)$.

$f(\ln(2))=1{,}25 \quad \Rightarrow \quad Q\left(\ln(2)\,|\,1{,}25\right)$.

Sekante s: $y = m \cdot x + n$, wobei $n = 1$ wegen $P(0\,|\,1)$.

$m=\dfrac{1{,}25-1}{\ln(2)-0}=\dfrac{1}{4\ln(2)}\approx 0{,}36 \;\Rightarrow s: \quad y=0{,}36\cdot x+1$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)$.

Der Term in der Klammer ist größer als Null, da $e^{x}>0$ und $e^{-x}>0$ für alle $x\in I\!R$. Somit besitzt f keine Nullstellen.

Teilaufgabe b)

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

$f''(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x}-\left(-e^{-x}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)=f(x)$.

Da f und somit auch f'' keine Nullstellen besitzen (vgl. a) (2)), besitzt der Graph der Funktion f keine Wendepunkte.

(2) Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen: $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}=e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad x=0$. [mögliche Extremstelle]

Hinreichende Bedingung:
Wegen $f'(0)=0$ und $f''(0)=f(0)=1>0$ liegt bei $P(0\,|\,1)$ ein lokaler Tiefpunkt vor.

(3) $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x} + e^{x}\right) = f(x)$.

Daraus folgt, dass der Graph von *f* symmetrisch zur *y*-Achse verläuft.

(4) Für die Schnittstellen des Graphen von *f* und der Geraden *y* = 10 liefert der GTR: $x \approx -2{,}99$ und $x \approx 2{,}99$. Aus dem Verlauf der Graphen folgt, dass der Graph von *f* für $-2{,}99 \leq x \leq 2{,}99$ unterhalb der Geraden *y* = 10 verläuft. Somit ist das gesuchte Intervall etwa 5,98 [LE] lang.

Teilaufgabe c)

(1) $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 20{,}04$. Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der *x*-Achse beträgt ungefähr 20,04 FE.

Für dem Flächeninhalt des Rechtecks gilt: $A = 6 \cdot 10 = 60$ [FE]

Der gesuchte Anteil beträgt damit: $\frac{20{,}04}{60} \approx 0{,}33\,[= 33\,\%]$.

(2) Für den Ansatz $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 40$ liefert der GTR die Lösung $a \approx 3{,}69$.

Das gesuchte Intervall ist ungefähr [–3,69|3,69].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten von *P* und *Q* an.	2			
2	(1) ermittelt die Gleichung der Sekante.	2			
3	(2) begründet, dass der Graph von *f* keine Nullstellen besitzt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $f''(x) = f(x)$ gilt.	2			
2	(1) interpretiert die Aussage in Bezug auf die maximal mögliche Anzahl von Wendepunkten.	1			
3	(2) untersucht die Funktion *f* rechnerisch auf lokale Extrempunkte.	3			
4	(3) zeigt, dass $f(x) = f(-x)$ gilt und interpretiert die Aussage geometrisch.	2			
5	(4) bestimmt die Länge des Intervalls, in dem $f(x) \leq 10$ gilt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Inhalt der gesuchten Fläche und ermittelt den Anteil dieser Fläche an der Fläche des Rechtecks *ABCD*.	3			
2	(2) ermittelt das Intervall [-*a*;*a*], so dass der Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion *f* 40 [FE] beträgt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**5**			

Summe insgesamt	**20**			