Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung ab 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

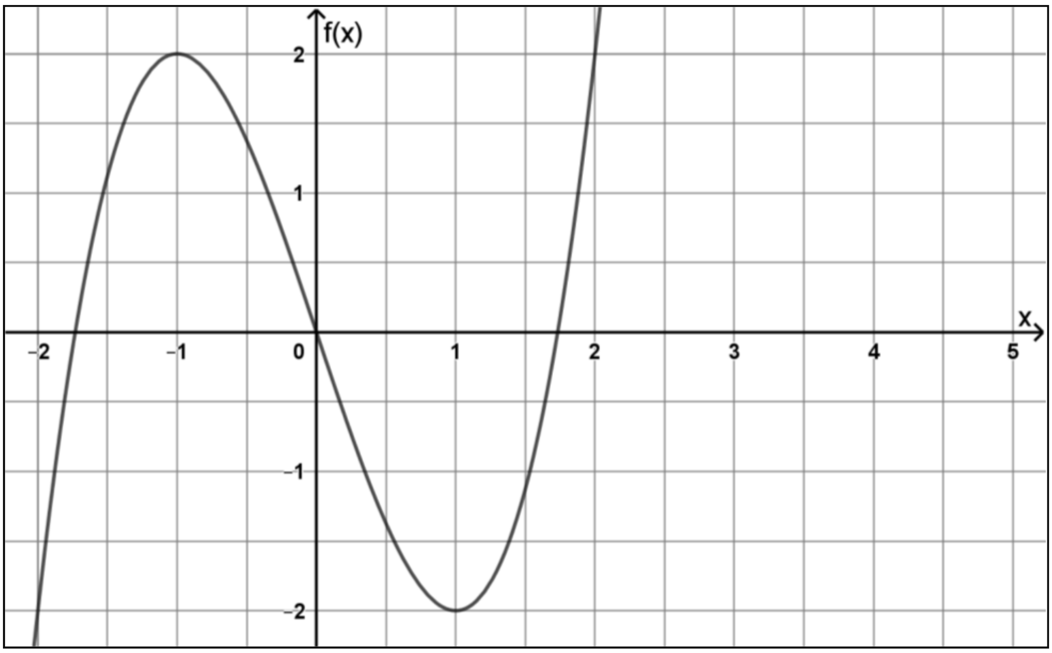
Eine Funktion f ist gegeben durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in der *Abbildung* dargestellt.

a) (1) *Begründen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.*

(2) Der Graph von f schließt mit der x-Achse im zweiten Quadranten die Fläche A ein.
Bestimmen Sie rechnerisch die Größe dieser Fläche.
[Zur Kontrolle: $A = 2{,}25\,FE$]

(3) Gegeben ist die Gerade g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -2x$, $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche A aus (2) *teilt.*

(1 + 5 + 4 Punkte)



Abbildung

Name: ____________________

Gegeben ist die Schar die ganzrationaler Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = x^3 - 3k \cdot x + k^2 - 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}.$$

b) (1) Die Funktion *f* gehört zur Funktionenschar f_k.
Geben Sie k so an, dass gilt $f = f_k$.

(2) *Bestimmen Sie alle Werte von k, so dass* $f_k(2) = 2$ *gilt.*

(1 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die Funktion *h* mit $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) *Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte von h.*
Hierbei darf ohne Nachweis $h''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x}$ verwendet werden.

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von h in der Abbildung auf Seite* 1.

(3) *Entscheiden Sie begründet, ob im lokalen Hochpunkt* $H(2 \mid 4 \cdot e^{-2})$ *von h ein globales Maximum von h vorliegt.*
Geben Sie begründet das globale Minimum von h an.

(4) *Ermitteln Sie für* $x > 0$ *die Länge des Intervalls, in dem* $h(x) \geq 0{,}5$ *gilt, auf zwei Nachkommastellen gerundet.*

(5) Die Punkte $A(0 \mid 0)$, $B(u \mid 0)$ und $C(u \mid h(u))$ bilden für $0 \leq u \leq 10$ die Eckpunkte eines Dreiecks *ABC*.
Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal wird.

(6) *Beschreiben Sie, wie der Graph von j mit* $j(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \cdot e^{-(x-2)}$ *aus dem Graphen von h hervorgeht.*
Geben Sie den lokalen Hochpunkt der Funktion j an.

(6 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung ab 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmung von Parametern der oben genannten Funktionen
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. Medien/ Materialien
entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ gilt, ist der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Ursprung.

(2) Nullstellen von *f*: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$.

Wegen $f(-1) = 2$ liegt die im zweiten Quadranten eingeschlossene Fläche oberhalb der *x*-Achse.

F mit $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von *f*.

Die Größe der eingeschlossenen Fläche im zweiten Quadranten ist durch

$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-\sqrt{3}}^{0} = F(0) - F(-\sqrt{3}) = 2{,}25$ [FE] berechenbar.

(3) Die Schnittstellen der Graphen von *f* und *g* sind -1, 0 und 1.

Man erkennt in der Abbildung, dass die Gerade somit von -1 bis 0 unterhalb des Graphen von *f* verläuft.

Für die Größe der von den Graphen von *f* und *g* im zweiten Quadranten eingeschlossenen Fläche gilt $\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx = 0{,}25$.

$\frac{0{,}25}{2{,}25} = \frac{1}{9}$. Das Verhältnis der beiden Teilflächen beträgt 8:1.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt: $f = f_1$ bzw. $k = 1$.

(2) $f_k(2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 6k + k^2 - 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 6k + 5 = 0$

$\overset{GTR}{\Rightarrow} \quad k = 1$ oder $k = 5$.

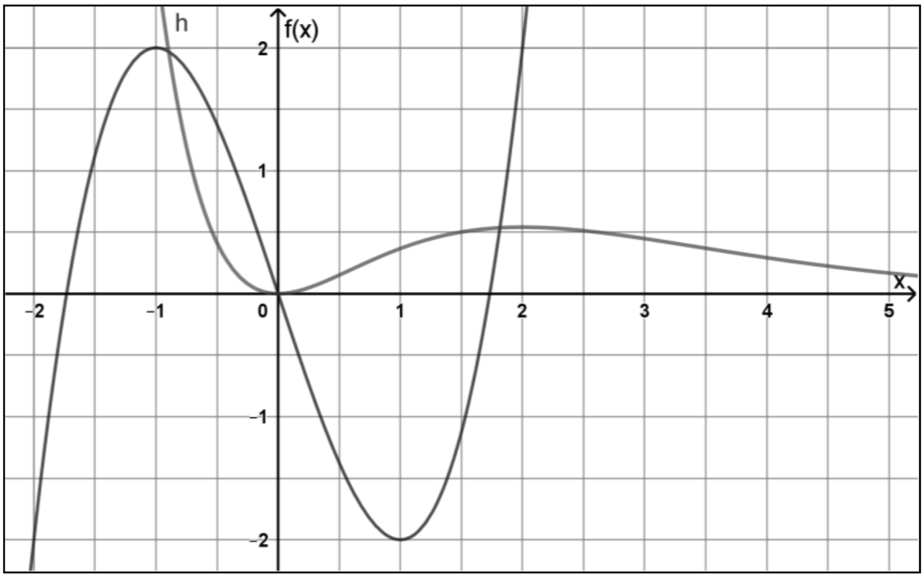
Teilaufgabe c)

(1) $h'(x) = (-1) \cdot x^2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x)$.

Die für lokale Extremstellen von *h* notwendige Bedingung $h'(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x} = 0$ ist für $x = 0$ und $x = 2$ erfüllt.

Mit $h''(0) = 2 > 0$ und $h(0) = 0$ hat *h* einen lokalen Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$.
Mit $h''(2) = -2e^{-2} < 0$ und $h(2) = 4e^{-2}$ hat *h* einen lokalen Hochpunkt $H(2\,|\,4e^{-2})$.

(2)



(3) Da für $x \to -\infty$ $h(x)$ gegen ∞ strebt, liegt in $H(2\,|\,4e^{-2})$ kein globales Maximum von *h* vor.

Wegen $x^2 \geq 0$ und $e^{-x} > 0$ gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Mit $h(0) = 0$, ist 0 das globale Minimum von *h*.

(4) Gesucht sind die Stellen *x* >0 für die $h(x) = 0{,}5$ gilt.

Der Taschenrechner liefert im Intervall [0;2] die Lösung $x \approx 1{,}488$ und im Intervall [2;3] die Lösung $x \approx 2{,}618$.

Unter Berücksichtigung des Verlaufs des Graphens folgt:
Das Intervall, in dem $h(x) \geq 0{,}5$ gilt, hat eine Länge von ungefähr 1,13.

(5) $A(u) = 0{,}5 \cdot u \cdot h(u) = 0{,}5 \cdot u^3 \cdot e^{-u}$.

Der Taschenrechner liefert für $0 \leq u \leq 10$ das Maximum der Funktion A bei $u = 3$. Somit wird der Flächeninhalt des Dreiecks für $u = 3$ maximal.

(6) Der Graph von j geht aus dem Graphen von h durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Streckfaktor 3 und eine Verschiebung in x-Richtung um 2 Einheiten nach rechts hervor. Der lokale Hochpunkt von j ist $H(4 \mid 12e^{-2})$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.	1			
2	(2) bestimmt die erforderlichen Nullstellen als Integrationsgrenzen und gibt eine Stammfunktion an.	3			
3	(2) bestimmt rechnerisch die Größe der Fläche.	2			
4	(3) bestimmt die Größe der von den Graphen von f und g eingeschlossen Fläche im zweiten Quadranten.	3			
5	(3) bestimmt das Verhältnis, in dem die Gerade die Fläche A teilt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ………………………………………………………………….… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt k an, so dass $f = f_k$ gilt.	1			
2	(2) bestimmt alle Werte von k so, dass $f_k(2) = 2$ gilt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………….… ……………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**3**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt einen Funktionsterm von h' an und bestimmt die möglichen Extremstellen mit einer notwendigen Bedingung.	3			
2	(1) bestätigt die Extremstellen mit einer hinreichenden Bedingung und bestimmt die Koordinaten der Extrempunkte.	3			
3	(2) skizziert den Graphen von h in der Abbildung.	2			
4	(3) entscheidet begründet, ob im lokalen Hochpunkt von h ein globales Maximum von h vorliegt.	1			
5	(3) gibt begründet das globale Minimum von h an.	2			
6	(4) ermittelt für $x > 0$ die Länge des Intervalls, in dem $h(x) \geq 0,5$ gilt auf zwei Nachkommastellen gerundet.	3			
7	(5) gibt einen Term an, mit dem der Flächeninhalt abhängig von u berechnet werden kann.	2			
8	(5) bestimmt u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.	2			
9	(6) beschreibt, wie der Graph von j aus dem Graphen von h hervorgeht.	2			
10	(6) gibt den lokalen Hochpunkt von j an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (22) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**22**			

Summe insgesamt	**35**			