Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = (x+3) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ sowie die zugehörige zweite Ableitung f'' mit $f''(x) = x \cdot e^{-x} + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f bei* $x = -1$ *einen Wendepunkt besitzt.*

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in diesem Punkt.*

(2 + 3 Punkte)

b) Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.

(1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Begründen Sie, dass der Graph von f für* $x = 1{,}5$ *sein absolutes Minimum annimmt.*

(3) Es gilt $f(1{,}5) = -24{,}5$.
Der Graph einer Funktion *g* geht durch Verschiebung aus dem Graphen von *f* hervor.
Das absolute Minimum des Graphen von *g* liegt im Ursprung.
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm der Funktion g an.

[Hinweis: Der Term von *g* muss nicht vereinfacht oder ausmultipliziert werden.]

(2 + 2 + 1 Punkte)

Name: ____________________

c) Der Graph in *Abbildung 1* stellt für einen Wassertank die Zuflussrate von Wasser in Abhängigkeit von der Zeit für einen Beobachtungszeitraum von 10 Stunden dar. Dabei wird die seit Beobachtungbeginn vergangene Zeit in Stunden auf der horizontalen *t*-Achse und die Zuflussrate in m³/h [Kubikmeter pro Stunde] auf der *y*-Achse abgetragen. Zu Beginn der Beobachtung befinden sich 6 m³ Wasser im Tank.

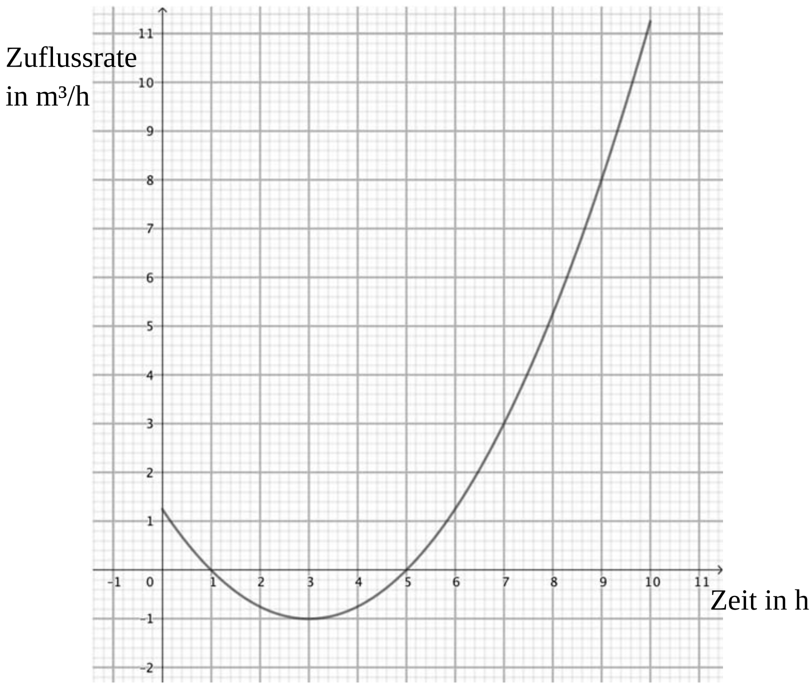

Abbildung 1

(1) *Entscheiden Sie, welche zwei Aussagen über die Wassermenge im Tank zutreffen.*

- ☐ Zum Zeitpunkt t = 1 befindet sich kein Wasser im Behälter.
- ☐ Im Zeitintervall [0; 1] nimmt die Wassermenge im Behälter ab.
- ☐ Zum Zeitpunkt t = 3 befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.
- ☐ Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Wassermenge im Behälter zu.
- ☐ Zum Zeitpunkt t = 5 befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt t = 1.

(2) In den ersten zwei Stunden des Beobachtungszeitraums wird die Zuflussrate durch die Funktion *f* mit $f(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{5}{4}$ modelliert. Dabei gibt *t* die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden und *f*(*t*) die Zuflussrate in m³/h an.

Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$ und der Punkt $P(2\,|\,6\,|\,-3)$.

(1) *Zeigen Sie, dass der Koordinatenursprung in der Ebene E liegt.*

(2) *Zeigen Sie, dass der Vektor* $\overrightarrow{OP}$ *senkrecht zur Ebene E liegt.*

(3) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.*

(2 + 2 + 1 Punkte)

e) X sei eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 100$ und $p = \frac{1}{10}$.

(1) *Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X an.*

(2) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ausschließlich bei den letzten beiden Versuchen ein Erfolg einstellt.
Entscheiden Sie, mit welchem der folgenden Terme I *bis* III *die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen werden kann.*

I: $\binom{100}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{98}$

II: $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{98}$

III: $2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{98}$

(3) *Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnen werden kann, dass unter* 100 *Versuchen mindestens ein Erfolg eintritt.*

(2 + 1 + 2 Punkte)

Hinweis:
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
   Funktionen und Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. Medien/ Materialien
   entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$.
Mit $f''(-2) = -2\cdot e^2 + e^2 = -e^2 < 0$ und $f''(0) = e^0 = 1 > 0$ folgt, dass der Graph von *f* bei *x* = -1 einen Wendepunkt besitzt.

(2) $f'(x) = e^{-x} + (-1)\cdot(x+3)\cdot e^{-x} = (1-x-3)\cdot e^{-x} = (-x-2)\cdot e^{-x}$
Ansatz für die Tangentengleichung: $y = f'(-1)\cdot x + n$.
Mit $f'(-1) = (1-2)\cdot e^{-(-1)} = -e$ und $f(-1) = (-1+3)\cdot e^{-(-1)} = 2e$
folgt: $2e = -e\cdot(-1) + n \quad \Leftrightarrow \quad e = n$.
Es ergibt sich die Tangentengleichung: $y = -e\cdot x + e$.

Teilaufgabe b)

(1) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 6x - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0$.

Die beiden Nullstellen x_1 und x_2 sind: $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-10)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$.

Die Funktion *f* hat die beiden Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$.

(2) Da der Faktor vor dem x^2 positiv ist, ist der Graph von *f* eine nach oben geöffnete Parabel. Somit liegt das absolute Minimum im Scheitelpunkt, dessen *x*-Koordinate in der Mitte der *x*-Koordinaten der Nullstellen liegt.

Das absolute Minimum liegt somit bei $\frac{-2+5}{2} = 1{,}5$.

(3) Für den Term von *g* gilt: *g*(x) = *f*(*x* + 1,5) + 24,5.

Teilaufgabe c)

(1) *Entscheiden Sie, welche zwei Aussagen über die Wassermenge im Tank zutreffen.*

☐	Zum Zeitpunkt t = 1 befindet sich kein Wasser im Behälter.
☐	Im Zeitintervall [0; 1] nimmt die Wassermenge im Behälter ab.
☐	Zum Zeitpunkt t = 3 befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.
x	Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Wassermenge im Behälter zu.
x	Zum Zeitpunkt t = 5 befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt t = 1.

(2) $F(t) = \frac{1}{12} \cdot t^3 - \frac{3}{4} \cdot t^2 + \frac{5}{4} \cdot t$ ist eine Stammfunktion von *f*.

Für das Volumen *V* gilt: $V = 6 + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 6 + F(2) - F(0) = 6 + \frac{4}{6} - 3 + \frac{15}{6} = 6\frac{1}{6}$ [m³].

Teilaufgabe d)

(1) Der Ansatz $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $t = -2$ und $s = 1$ aus den x_2- und x_3- Koordinaten. Wegen $12 + 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 9 = 0$ liegt der Ursprung in der Ebene *E*.

(2) Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ verläuft genau dann senkrecht zu *E*, wenn $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zu beiden Spannvektoren der Ebene verläuft.

Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + 0 + (-3) \cdot 4 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) = 0$ verläuft $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zu *E*.

(3) Da der Ursprung O in *E* liegt und $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zu *E* verläuft gibt $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ den Abstand des Punktes *P* von der Ebene *E* an.

Der Abstand beträgt $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$ [LE].

Teilaufgabe e)

(1) $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$, $\sigma = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 100} = \sqrt{9} = 3$.

(2) Term II ist geeignet.

(3) Mit dem Term $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{100}$ kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass der Graph von f bei $x = -1$ einen Wendepunkt besitzt.	2			
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in diesem Punkt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Nullstellen der Funktion f.	2			
2	(2) begründet, dass der Graph von f für $x = 1{,}5$ sein absolutes Minimum annimmt.	2			
3	(3) gibt einen Funktionsterm der Funktion g an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, welche zwei Aussagen zutreffen.	2			
2	(2) berechnet das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………..... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass der Koordinatenursprung in der Ebene E liegt.	2			
2	(2) zeigt, dass der Vektor $\vec{v}$ senkrecht zur Ebene E liegt.	2			
3	(3) bestimmt den Abstand des Punktes P von der Ebene E.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………..... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Erwartungswert und die Standardabweichung an.	2			
2	(2) entscheidet, mit welchem Term die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann.	1			
3	(3) gibt einen Term an, mit dem sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen lässt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………….... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe e)		**5**			

Summe insgesamt	**25**			