

Beispiel einer Kontextaufgabe: Dämmung eines Dachzimmers

Ein Hersteller für Dämmstoffe hat die Temperatur in einem ungedämmten Zimmer unter dem Dach eines Hauses gemessen.

Der Temperaturverlauf wird über einen Zeitraum von 22 Stunden im Verlauf von zwei aufeinanderfolgenden Tagen durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0,008 \cdot t^3 - 0,28 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 25,6 ; 0 \leq t \leq 22$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden nach 12:00 Uhr mittags des ersten Tages.

$f(t)$ ist die Temperatur in dem ungedämmten Dachzimmer in $^{\circ}\text{C}$.

Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

- a) Geben Sie in der Abbildung 1 in den beiden leeren Kästchen die entsprechenden Uhrzeiten an.

Weisen Sie nach, dass am ersten Tag um 23:00 Uhr die Raumtemperatur ca. $24,4^{\circ}\text{C}$ betrug.

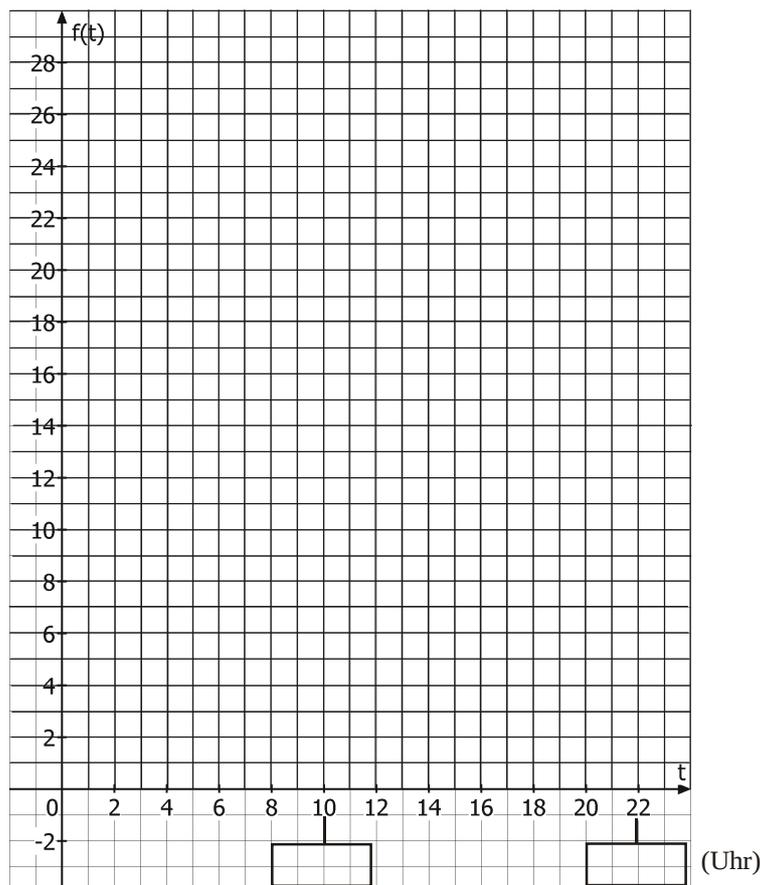


Abbildung 1

(2 Punkte)

- b) Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, für den ersten Tag im Zeitraum von 14:00 Uhr bis 20:00 Uhr einen ungefähren Wert für die Höchsttemperatur im ungedämmten Raum.

(9 Punkte)

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in die Abbildung 1 ein.

(4 Punkte)

d) Weisen Sie nach, dass es in dem festgelegten Zeitintervall ($0 \leq t \leq 22$) einen über $3\frac{1}{2}$ -stündigen Zeitraum gab, in dem die Temperatur unter 18°C lag.

(4 Punkte)

e) Durch eine Dämmung des Dachraums mit den Materialien des Herstellers werden folgende drei Effekte erreicht:

- Die höchste Temperatur wird im Vergleich zu dem ungedämmten Raum erst zwei Stunden später erreicht, so dass die höheren Temperaturen erst dann in den Innenraum vordringen, wenn es draußen schon etwas abgekühlt ist.
- Die Temperaturhöhe schwankt nicht mehr so stark.
- Die tiefste Temperatur am Morgen ist im gedämmten Raum höher als die tiefste Temperatur am Morgen im ungedämmten Raum.

Der Hersteller hat für einen Kunden die Effekte in einer Handzeichnung (Abbildung 2) veranschaulicht.

(1) Wenn man den Graphen von f um zwei Einheiten nach rechts verschiebt, so erhält man den Graphen einer neuen Funktion g .

Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.

(2) Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion h , die zur Modellierung des Temperaturverlaufs in einem gedämmten Raum geeignet ist.

Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

(5 Punkte)

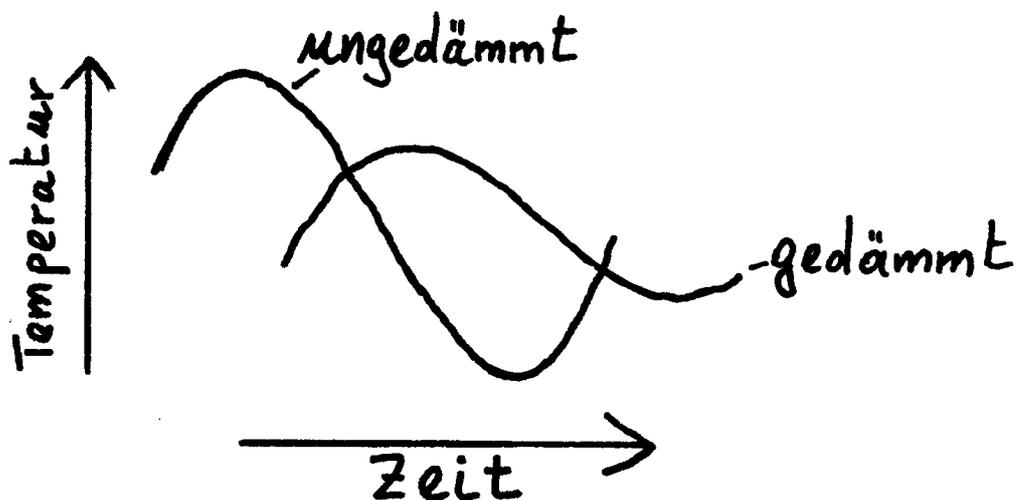
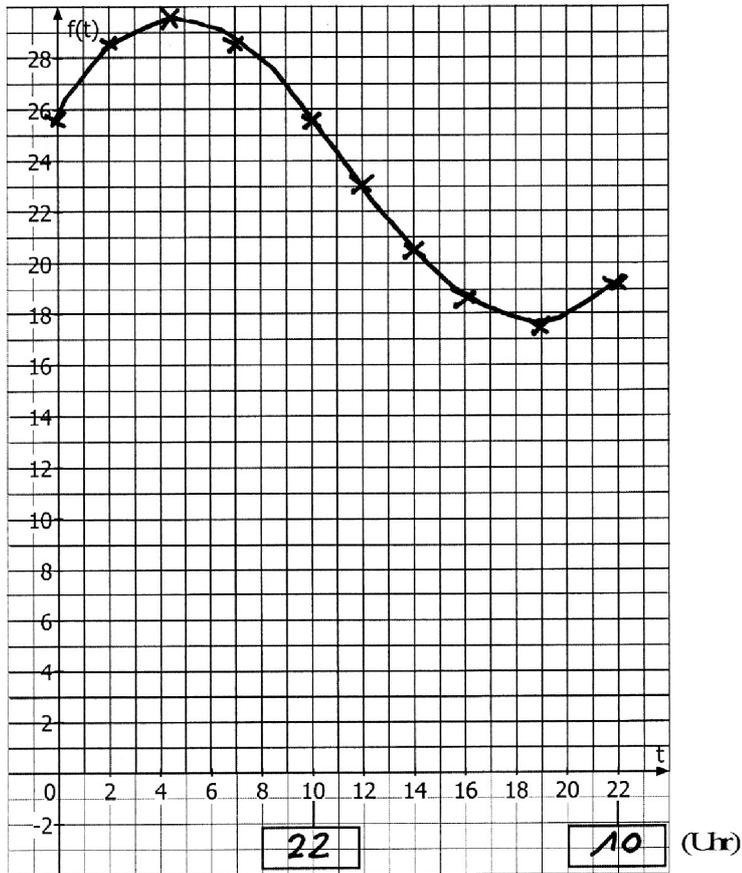


Abbildung 2

Beispiel einer Kontextaufgabe: Dämmung eines Dachzimmers

Beispiellösung

a) Uhrzeiten: siehe Zeichnung



$$f(11) = 24,368 \approx 24,4$$

Die Temperatur betrug also tatsächlich ca. 24,4 °C.

b) Es gilt: $f'(t) = 0,024t^2 - 0,56t + 2$. Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$.

Setze $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 0,024t^2 - 0,56t + 2 = 0$, mittels GTR erhält man $t \approx 4,4$ und $t \approx 18,9$.

$t \approx 18,9$ befindet sich nicht in dem angegebenen Intervall von 14 bis 20 Uhr (also $t \in [2; 8]$).

Für die hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechselkriterium):

$$f'(4) = 0,144 > 0 \text{ und } f'(5) = -0,2 < 0; \text{ also } +/- \text{ -VZW von } f'(x).$$

$f(4,4) \approx 29,66$. Es ergibt sich ein lokales Maximum mit $y_H \approx 29,66$.

Randwertuntersuchung:

$$f(2) \approx 28,54 < 29,66 \text{ und } f(8) \approx 27,78 < 29,66.$$

Die Höchsttemperatur am ersten Tag im Zeitraum von 14:00 Uhr bis 20:00 Uhr beträgt also ca. 29,7 °C.

Der Hinweis „ausgehend von einem mathematischen Ansatz“ in der Aufgabenstellung weist darauf hin, dass in der Lösung der Rechenweg angegeben werden soll. Die Ermittlung der Lösung durch ein Abtasten des Graphen oder die Angabe des entsprechenden Grafikrechnerbefehls reicht nicht aus.

Die Randwertuntersuchung gehört zum vollständigen Lösungsweg.

c) Siehe Zeichnung (Vorlage mit GTR).

d) Setze: $f(t) = 18$. Mittels GTR erhält man für $0 \leq t \leq 22$: $t \approx 16,97$ und $t \approx 20,73$.

Da beispielsweise $f(17) = 17,984$ gilt, liegen die Funktionswerte von f z.B. für $17 < t < 20,6$ unterhalb von 18. $20,6 - 17 = 3,6 > 3,5$.

Der Zeitraum, in dem die Temperatur unter 18°C lag, beträgt daher mehr als 3,5 Stunden.

e) (1) $g(t) = f(t-2) = 0,008 \cdot (t-2)^3 - 0,28 \cdot (t-2)^2 + 2 \cdot (t-2) + 25,6$

e) (2) Eine mögliche Lösung:

$$h(t) = 0,5 \cdot f(t-2) + 11 = 0,004 \cdot (t-2)^3 - 0,14 \cdot (t-2)^2 + (t-2) + 23,8.$$

Die Rechts-Verschiebung um zwei Einheiten entlang der x-Achse erfolgt entsprechend der Lösung zur Aufgabe e) (1). Die Verminderung der Schwankung wird zunächst durch die Stauchung des Funktionsgraphen erreicht, hier mit dem Faktor 0,5. Anschließend muss der Graph der Funktion mit dem Funktionsterm $0,5 \cdot f(t-2)$ auch noch in y-Richtung nach oben verschoben werden, hier beispielsweise um 11 Einheiten, um sich innerhalb des durch f gegebenen Rahmens zu bewegen.

Hinweis: In dieser Teilaufgabe bietet sich der Graphikrechner als Instrument planvollen Experimentierens an.

Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.