Beispielaufgabe zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}75 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 2$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

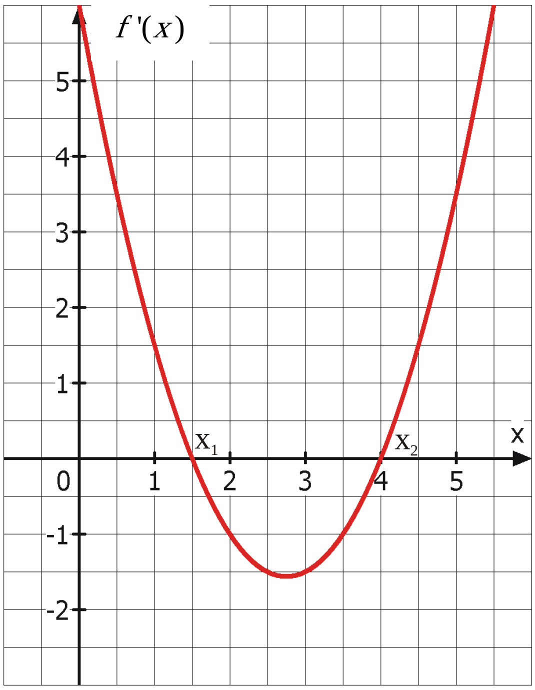


Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie die beiden Stellen x_1 und x_2, an denen die erste Ableitung f' den Wert Null besitzt.*

(2) Geben Sie an, ob an der Stelle x_1 ein lokaler Hoch- oder ein lokaler Tiefpunkt des Graphen von f vorliegt, und begründen Sie Ihre Angabe mit Hilfe der Abbildung 1.

(6 Punkte)

b) *Ermitteln Sie grafisch einen Näherungswert für die Steigung der in Abbildung 1 dargestellten Parabel an der Stelle $x = 4{,}5$.*
Zeichnen Sie dazu in die Abbildung 1 auch ein geeignetes beschriftetes Steigungsdreieck ein.

(3 Punkte)

c) (1) *Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$.*

Zur Kontrolle: Die Tangente hat die Steigung -1,5.

(2) *Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, eine Gleichung der Normalen n an den Graphen von f im Punkt* $P\left(3\middle|\frac{1}{4}\right)$.

Hinweis: Nutzen Sie die im Kasten dargelegten Informationen über den Begriff der Normalen.

Normale

Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente an einen Graphen einer Funktion f durch deren Berührpunkt B verläuft, siehe Abbildung 2:

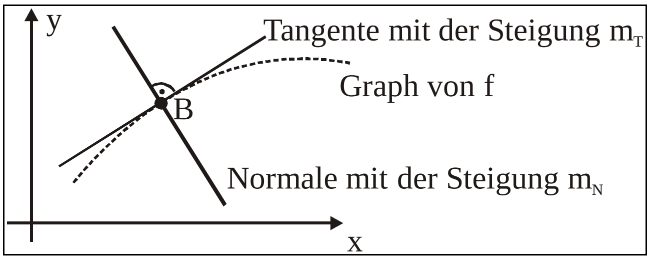


Abbildung 2

Die Steigung m_N berechnet man mithilfe der Gleichung: $m_T \cdot m_N = -1; (m_T \neq 0)$.

(3) Ermitteln Sie Näherungswerte für die Schnittstellen des Graphen von f mit der Normalen *n*.
Wenn Sie Teilaufgabe c(2) nicht lösen konnten, verwenden Sie bitte die Geradengleichung $y = 0{,}6 \cdot x - 1{,}55$ als eine Ersatzlösung anstelle der Normalengleichung.

(10 Punkte)

d) Unten ist eine Tabelle abgebildet.

(1) *Geben Sie die fehlenden Werte / Näherungswerte in den vier leeren Feldern an. Runden Sie dabei auf vier Nachkommastellen.*

(2) *Beschreiben Sie, welche Tatsache die Tabelle in Bezug auf die Ableitung verdeutlicht.*

Term	$\frac{f(3{,}5)-f(3)}{0{,}5}$	$\frac{f(3{,}05)-f(3)}{0{,}05}$	$\frac{f(3{,}005)-f(3)}{0{,}005}$	$\frac{f(3{,}0005)-f(3)}{0{,}0005}$
Wert / Näherungswert				

Tabelle

(5 Punkte)

Beispielaufgabe zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen

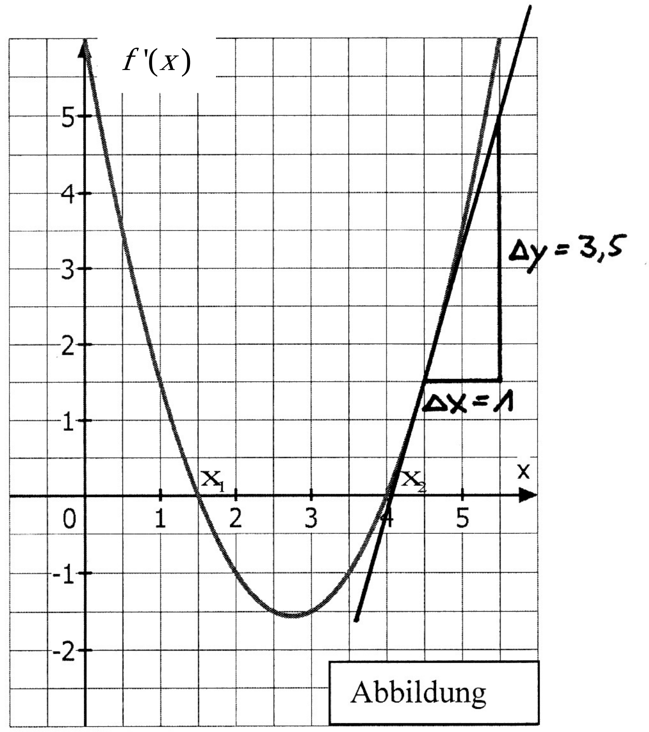
Beispiellösung

a) (1) $f'(x) = x^2 - 5{,}5x + 6$. Setze $f'(x) = 0$. Man erhält $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = 4$.

Ein bloßes Ablesen der Nullstellen genügt wegen des Operators „Berechnen Sie" nicht.

a (2) In der Abbildung 1 erkennt man an der ersten Nullstelle einen +/– - Vorzeichenwechsel der Ableitungswerte $f'(x)$. Das bedeutet, dass der Graph der Ausgangsfunktion f erst steigt und dann sinkt. Daher liegt an der Stelle $x = 1{,}5$ ein lokales Maximum vor.

b) Siehe Zeichnung: Die Steigung beträgt ca. 3,5.



c) (1) Für $t: y = m \cdot x + b$ gilt:

$m = f'(3) = -1{,}5$

Setze $m = -1{,}5$ und die Koordinaten von $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$ ein:

$\frac{1}{4} = -1{,}5 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 0{,}25 + 4{,}5 = 4{,}75$

Also $t: y = -1{,}5 \cdot x + 4{,}75$

Der Hinweis „ausgehend von einem mathematischen Ansatz" in der Aufgabenstellung weist darauf hin, dass in der Lösung der Rechenweg angegeben soll und nicht nur die Tangentengleichung.

c (2) Für die Steigung m_N der Normalen n mit $n: y = m_N \cdot x + b_N$ gilt:

$m_N \cdot (-1{,}5) = -1 \Leftrightarrow m_N = \frac{2}{3}$

Setze $m_N = \frac{2}{3}$ und die Koordinaten von $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$ ein:

$\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$

Also $n: y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{7}{4}$

c (3) Setze $f(x) = n(x)$, mit dem GTR ergibt sich $x \approx 0{,}05$, $x = 3$ und $x \approx 5{,}20$.

[Mit der Ersatzlösung erhält man: $x \approx 0{,}09$, $x = 3$ und $x \approx 5{,}16$.]

d) (1) –1,2917; –1,4867; –1,4987; –1,4999

d (2) Die Tabelle zeigt: Je mehr sich h im Differenzenquotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ der Zahl Null nähert, desto mehr nähert sich der Wert dieses Differenzenquotienten der Zahl $-1{,}5$, das ist der Wert der ersten Ableitung an der Stelle 3.