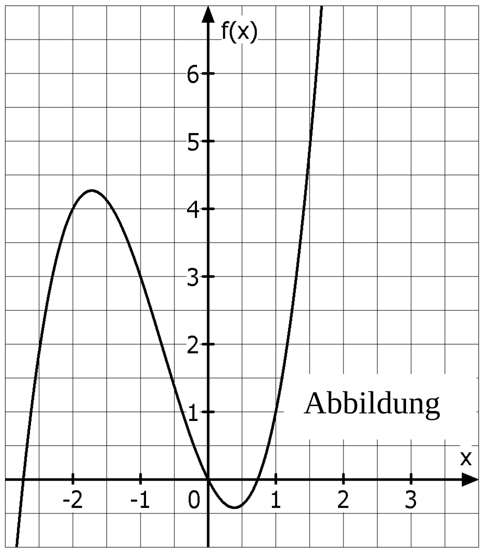
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f.*



(1) *Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit* $g: y = \frac{1}{2}x + 5$ *eine Tangente am Graphen von f im Punkt* $P(-2|4)$ *ist.*

(6 Punkte)

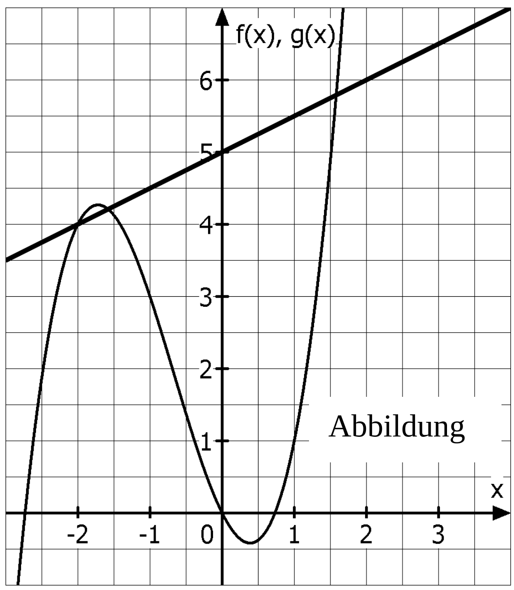
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 2) = 0$

Also $x_1 = 0$. Zusätzlich: $x^2 + 2 \cdot x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+2}$. Die drei Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = -1 + \sqrt{3}$.

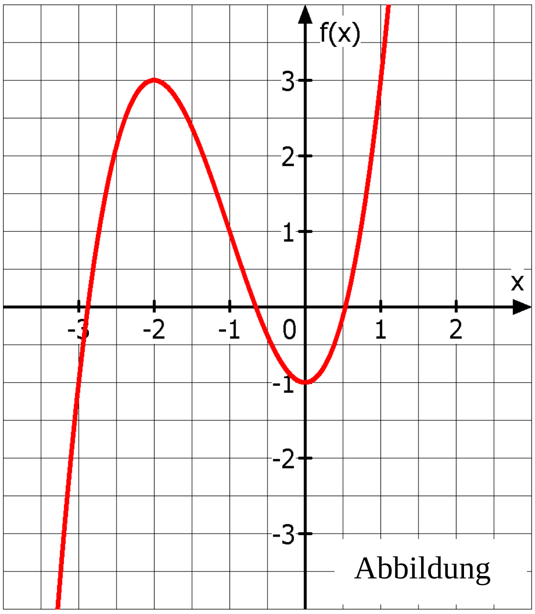
(2) Einzeichnen der Geraden g (siehe Abbildung rechts). Man sieht deutlich, dass g den Graphen von f im Punkt $P(-2|4)$ nicht berührt, sondern schneidet. Daher kann g keine Tangente am Graphen von f im Punkt P sein.



Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 1$. Die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes sind ganzzahlig. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f*.



Abbildung

(1) *Entscheiden Sie begründet, ob der Graph der Ableitungsfunktion f' eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.*

(2) *Geben Sie alle Werte für den Parameter c an, so dass die Funktion g_c mit der Gleichung $g_c(x) = f(x) + c$ genau zwei Nullstellen besitzt. Begründen Sie Ihre Angabe.*

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Es gilt: $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$. Das Vorzeichen des Koeffizienten vor x^2 entscheidet, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Weil $3 > 0$ gilt, ist die Parabel nach oben geöffnet.

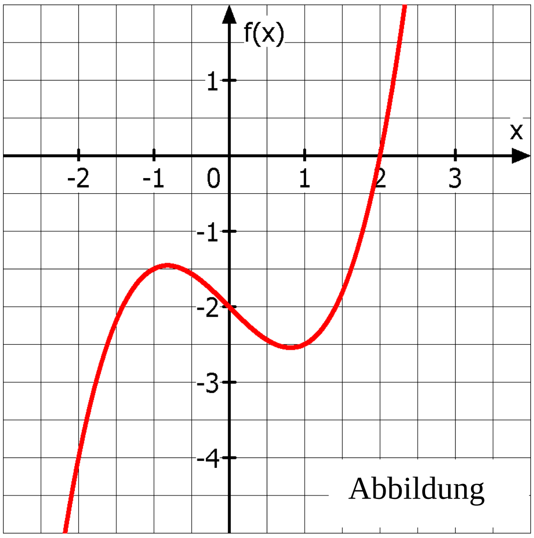
Oder: Die Parabel von f' besitzt die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$, denn sie sind die lokalen Extremstellen von f. Nur dazwischen fällt der Graph von f, also liegt die Parabel von f' für $-2 < x < 0$ unterhalb der x-Achse. Die Parabel muss also nach oben geöffnet sein.

(2) $c = -3$ oder $c = 1$. Damit es genau zwei Nullstellen gibt, muss der Graph von f die x-Achse im Hochpunkt oder im Tiefpunkt berühren. Somit muss entweder der Hochpunkt um drei Einheiten nach unten oder der Tiefpunkt um eine Einheit nach oben verschoben werden.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3-x-2$. Der Graph ist in der Abbildung dargestellt.



Abbildung

(1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die in der Zeichnung erkennbare Nullstelle tatsächlich eine Nullstelle ist.*

(2) *Gegeben ist die Funktion g_a mit der Gleichung $g_a(x)=f(x+a)$. Geben Sie an, wie sich der Graph von g_a verändert, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.*

Geben Sie außerdem einen Wert für a an, so dass die Funktion g_a die Nullstelle $x=-1$ besitzt.

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Am Graphen ist erkennbar, dass $x=2$ die vermutliche Nullstelle ist.

Zum rechnerischen Nachweis: Setze $x=2$ in $f(x)$ ein.

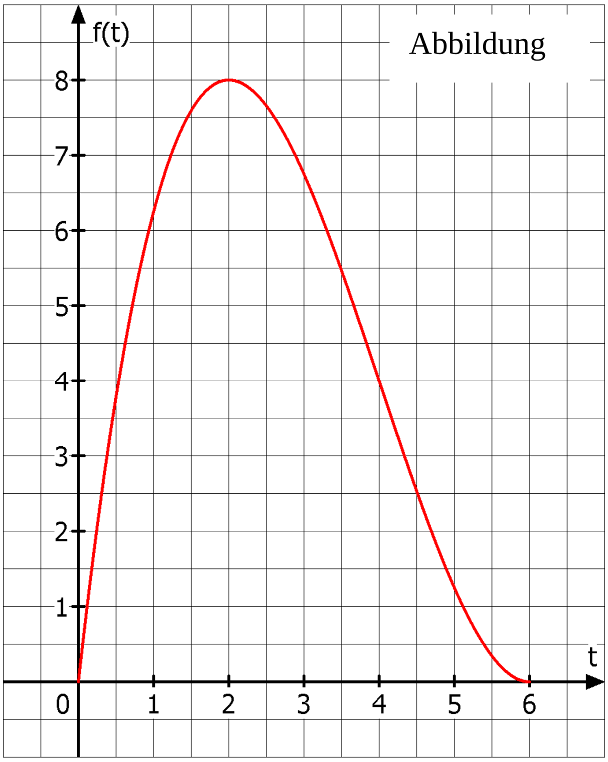
Wegen $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^3-2-2=\frac{8}{2}-2-2=4-2-2=0$ ist $x=2$ eine Nullstelle von *f.*

(2) Je größer a wird, desto weiter wird der entsprechende Graph der Funktion g_a nach links verschoben. Damit $x=-1$ eine Nullstelle wird, muss der Graph von f um drei Einheiten nach links verschoben werden, also muss $a=3$ gelten.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 4 zur Analysis

Die Funktion f mit der Gleichung $f(t)=\frac{1}{4}\cdot t^3-3\cdot t^2+9\cdot t$ beschreibt näherungsweise die Wachstums*geschwindigkeit* einer Pflanze in der Einheit $\frac{cm}{Woche}$. Dabei gibt t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt: $0\le t\le 6$. Der Graph der Funktion f ist in der Abbildung dargestellt.



(1) *Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze nach zwei Wochen.*

(2) Nehmen Sie an, die Pflanze hätte nach vier Wochen eine Höhe von 70 cm.
Entscheiden Sie, welche der drei nachfolgenden Aussagen stimmt. Kreuzen Sie dazu auf dem Arbeitsblatt an.

Nach fünf Wochen ist die Pflanze

O kleiner als 74 cm oder

O gleich 74 cm oder

O größer als 74 cm.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 4 zur Analysis

Beispiellösung

(1) $f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-3\cdot 2^2+9\cdot 2=\frac{8}{4}-12+18=8$.

Die Wachstumsgeschwindigkeit betrug zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn acht Zentimeter pro Woche.

(2) Aus dem Graphen kann man ablesen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach vier Wochen 4 cm pro Woche betrug und danach nur noch fällt. Also ist die Pflanze nach fünf Wochen kleiner als 74 cm.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

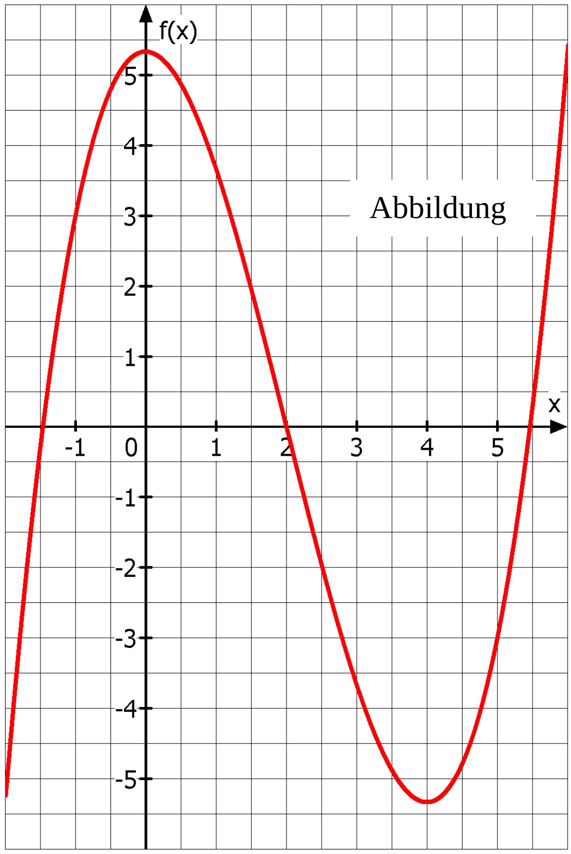
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 5 zur Analysis

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-2\cdot x^2+\frac{16}{3}$.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(2\,|\,0)$.*

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von f' in die Abbildung.*

(6 Punkte)



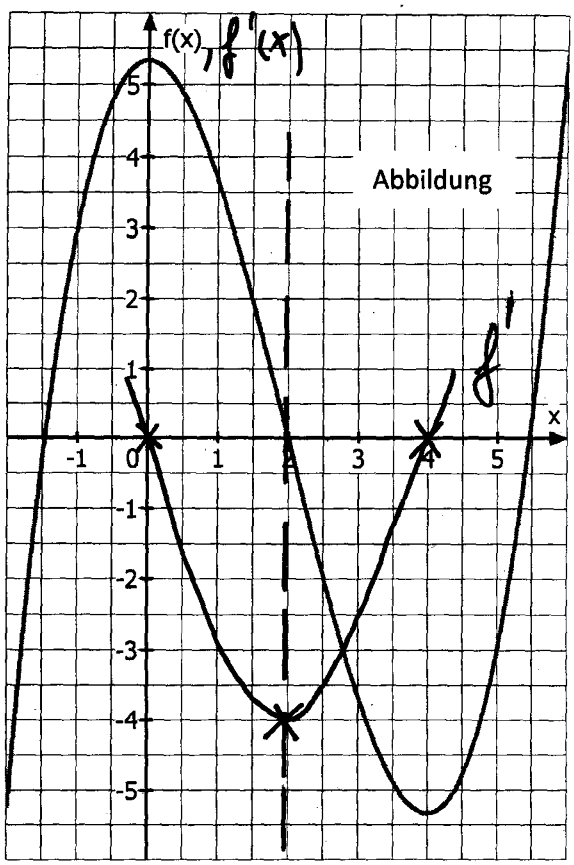
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 5 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Gesucht ist die Gleichung zu t mit $t(x)=m\cdot x+b$.

Mit $f'(x)=x^2-4x$ gilt für die Steigung von t: $m=f'(2)=4-4\cdot 2=-4$. Einsetzen von $m=-4$ und den Koordinaten von $P\left(2|0\right)$ ergibt: $0=-4\cdot 2+b \Leftrightarrow b=8$. Also lautet die Tangentengleichung: $t(x)=-4\cdot x+8$.

(2) Eine Skizze der Parabel von f' ist rechts abgebildet.



Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 6 zur Analysis

Gegeben ist eine Funktion *f*. Die Abbildung 1 zeigt die Parabel ihrer Ableitungsfunktion f' mit der Gleichung

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3.$$

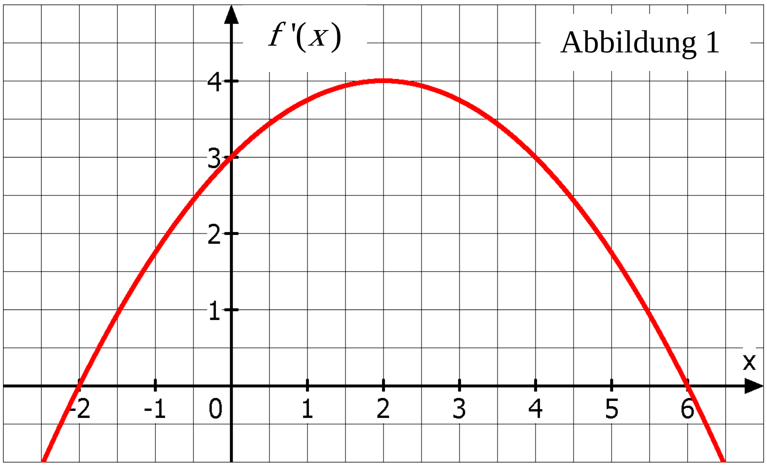


Abbildung 1

(1) Die Parabel von f' besitzt die beiden *Nullstellen* $x = -2$ *und* $x = 6$. *Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Nullstellen rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunktes S der Parabel.*

(2) *Begründen Sie, dass keine der beiden Abbildungen 2 und 3 den Graphen der Funktion f zeigt. Führen Sie jeweils mindestens ein Gegenargument auf.*

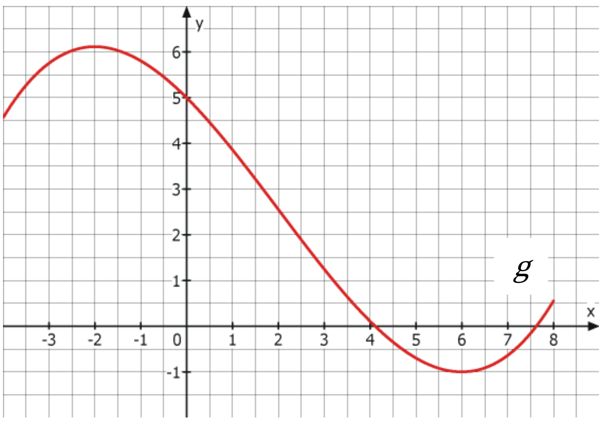


Abbildung 2

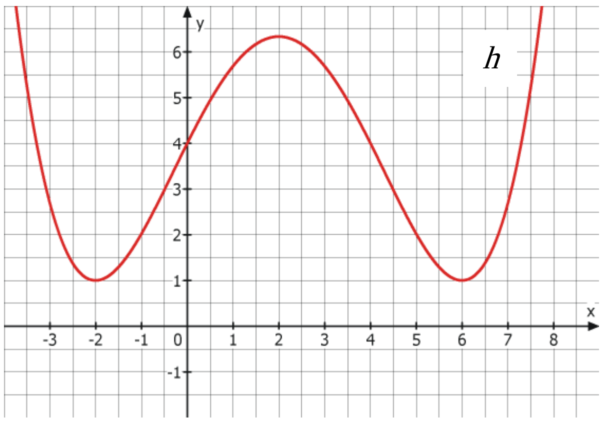


Abbildung 3

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 6 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Aus Symmetriegründen liegt die x-Koordinate des Scheitelpunktes S in der Mitte der beiden Nullstellen –2 und 6. Die Mitte ist 2. $f'(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$.

Der Scheitelpunkt S besitzt somit die Koordinaten $S(2|4)$.

(2) Der Graph der Funktion g in Abbildung 2 besitzt an der Stelle $x = 2$ eine negative Steigung, während am Graphen von Abbildung 1 abzulesen ist: $f'(2) = 4 > 0$.

Der Graph der Funktion h in Abbildung 3 zeigt drei lokale Extremstellen. Wegen der notwendigen Bedingung für Extremstellen hat h' mindestens drei Nullstellen, aber f' hat nur zwei Nullstellen.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.