



Name: \_\_\_\_\_

## Beispielaufgaben Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase ab 2024

### Mathematik

## Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

### Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von  $f$  ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

a) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:*

$$x \cdot (x-3)^2 = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x.$$

(2) Für die Gleichung der Funktion  $f$  gibt es also die beiden folgenden Darstellungsmöglichkeiten:

$$D1: f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$D2: f(x) = x \cdot (x-3)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Nennen Sie zu jeder der beiden Darstellungsmöglichkeiten D1 bzw. D2 jeweils einen Vorteil bei der Untersuchung von Eigenschaften der Funktion  $f$ .*

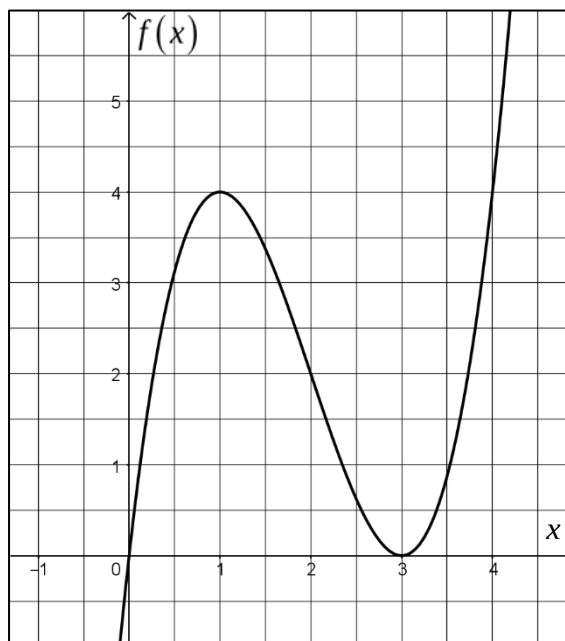


Abbildung 1

(2 + 2 Punkte)

b) *Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion  $f$  auf lokale Extremstellen und ermitteln Sie rechnerisch die Art der lokalen Extremstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von  $f$ .*

(8 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- c) (1) Zeichnen Sie die Sekante  $s$  durch die Punkte  $P(1|4)$  und  $Q(3,5|0,875)$  in die Abbildung 1 ein und ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung von  $s$ .
- (2) Berechnen Sie den Steigungswinkel  $\alpha$  von  $s$ .

(5 + 2 Punkte)

d) Betrachtet wird jetzt die Ableitungsfunktion  $f'$  mit  $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$ .

- (1) Zeichnen Sie den Graphen von  $f'$  in die Abbildung 2 ein.

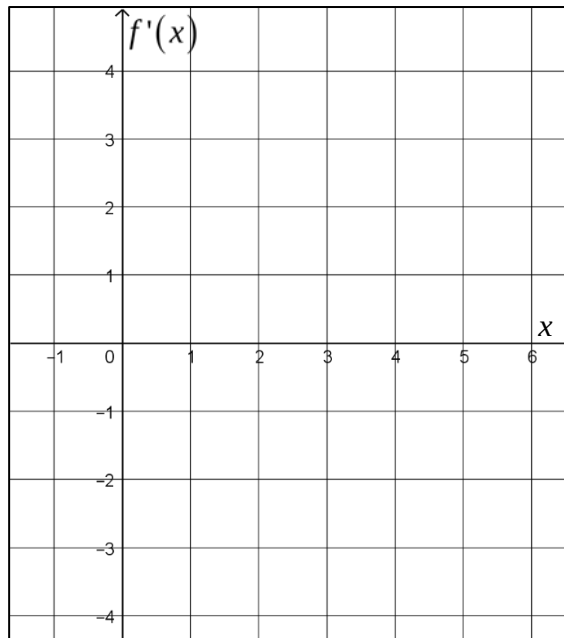


Abbildung 2

- (2) Gegeben ist außerdem die Ableitungsfunktion  $g'$  mit  $g'(x) = f'(x) + 4$ .

Entscheiden Sie begründet, ob der Graph einer möglichen Ausgangsfunktion  $g$  mindestens einen lokalen Extrempunkt besitzt.

(3 + 2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 4:

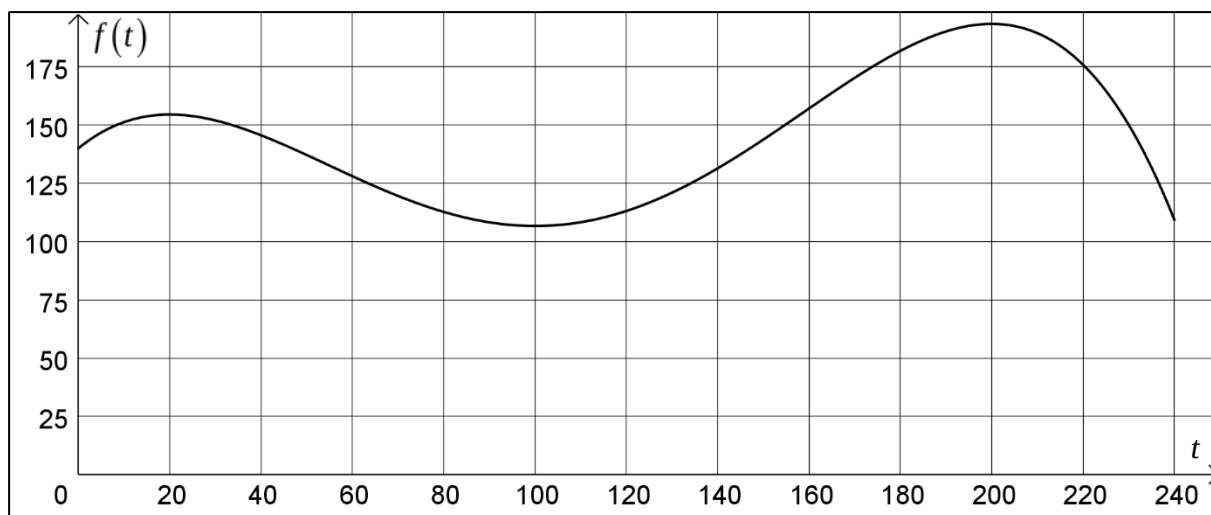
Patienten, die an Diabetes leiden, müssen regelmäßig Blutzuckermessungen durchführen. In der Regel wird dazu ein Blutstropfen auf einem Teststreifen mit einem elektronischen Testgerät analysiert. Seit einiger Zeit sind auch kontinuierliche Blutzuckermessungen möglich. Dabei wird durch einen Sensor fortlaufend der Blutzuckerwert des Diabetes-Patienten gemessen und übertragen, z. B. an eine Handy-App.

Der Blutzuckerwert eines Diabetes-Patienten wird für  $0 \leq t \leq 240$  durch die auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit

$$f(t) = -\frac{1}{1000000} \cdot t^4 + \frac{4}{9375} \cdot t^3 - \frac{13}{250} \cdot t^2 + \frac{8}{5} \cdot t + 140$$

modelliert. Dabei ist  $t$  die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Minuten und  $f(t)$  der Blutzuckerwert in Milligramm pro Deziliter  $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$ .

In der *Abbildung* ist der Graph von  $f$  im Intervall  $[0;240]$  dargestellt.



Abbildung

- a) Ermitteln Sie anhand der *Abbildung*, wie lange bei dem Diabetes-Patienten im Beobachtungszeitraum Blutzuckerwerte über  $175 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$  vorliegen.

(3 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- b) Der höchste Blutzuckerwert wird im Zeitraum von 180 Minuten bis 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn angenommen.

*Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt der höchste Blutzuckerwert vorliegt, und berechnen Sie diesen Wert.*

Ohne Nachweis darf verwendet werden:  $f'(t) = -\frac{1}{250000} \cdot (t-20) \cdot (t^2 - 300 \cdot t + 20000)$ .

(7 Punkte)

- c) Bei der Lösung einer Aufgabenstellung im gegebenen Sachzusammenhang wurden mit einem MMS Berechnungen durchgeführt. Dabei ergab sich:

- Die Gleichung  $f''(t) = 0$  hat die beiden Lösungen  $t_1$  und  $t_2$  mit  $t_1 \approx 54,6$  und  $t_2 \approx 158,7$ .
- $f'(0) = 1,6$ ,  $f'(t_1) \approx -0,91$ ,  $f'(t_2) \approx 1,35$ ,  $f'(240) \approx -4,93$ .

(1) *Geben Sie eine passende Aufgabenstellung im Sachzusammenhang zu den angegebenen Berechnungen an.*

(2) *Erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.*

(3) *Formulieren Sie einen Antwortsatz zu Ihrer Aufgabenstellung.*

(2 + 3 + 1 Punkte)

- d) Gegeben sind die beiden Terme

I  $\frac{f(120) - f(0)}{120 - 0}$

II  $f'(120)$ .

(1) *Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung die beiden Terme I und II für den Graphen von  $f$  haben und veranschaulichen Sie Term I in der Abbildung.*

Die Werte der beiden Terme I und II wurden berechnet:

I  $\frac{f(120) - f(0)}{120 - 0} = -0,224$

II  $f'(120) = 0,64$ .

(2) *Geben Sie die Bedeutung der beiden berechneten Werte im Sachzusammenhang an.*

(4 + 4 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Dokument mit mathematischen Formeln (ab 2025 verpflichtend)  
oder Mathematische Formelsammlung (bis 2024 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

*Unterlagen für die Lehrkraft***Beispielaufgaben Zentrale Klausur  
am Ende der Einführungsphase ab 2024***Mathematik***1. Aufgabenart / Inhaltsbereich**

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Inhaltsfeld Funktionen und Analysis / Innermathematische Argumentationsaufgabe

Aufgabe 4: Inhaltsfeld Funktionen und Analysis / Aufgabe mit realitätsnahem Kontext

**2. Aufgabenstellung <sup>1</sup>**

siehe Prüfungsaufgaben

**3. Materialgrundlage**

Aufgabe 4: modifiziert nach IQB 2018 Analysis

**4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2024**

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

**Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte****Funktionen und Analysis**

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

**5. Zugelassene Hilfsmittel**

- WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner)
- Dokument mit mathematischen Formeln (ab 2025 verpflichtend) oder Mathematische Formelsammlung (bis 2024 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Für die Leistungen werden entsprechend der konkreten Lösungsqualität Punkte im vorgegebenen Rahmen vergeben. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“). Es dürfen nur ganzzahlige Punkte vergeben werden.

### Aufgabe 3:

#### Modelllösung a)

$$(1) \quad x \cdot (x-3)^2 = x \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 9) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x.$$

(2) Aus der Darstellungsform D1 kann man direkt die Gleichung der Ableitungsfunktion bestimmen.

Aus der Darstellungsform D2 kann man unmittelbar die Nullstellen ablesen.

#### Modelllösung b)

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9, \quad f''(x) = 6 \cdot x - 12.$$

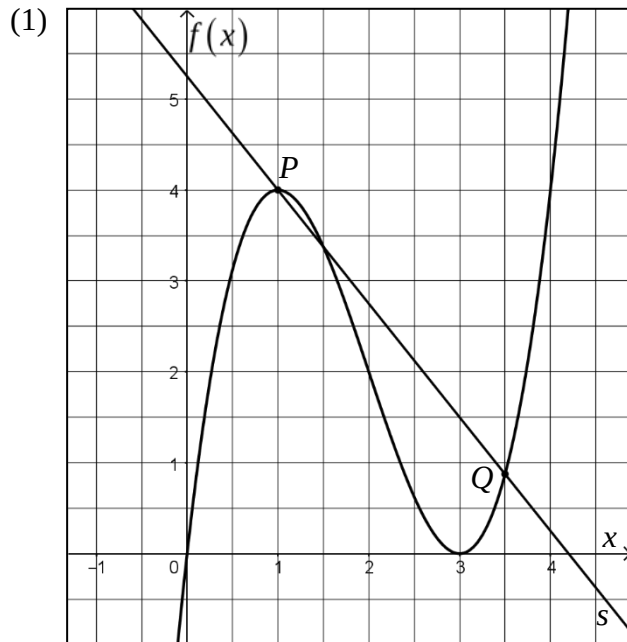
Aus der notwendigen Bedingung  $f'(x) = 0$  für lokale Extremstellen ergibt sich  $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2^2 - 3} = 1 \vee x = 2 + \sqrt{2^2 - 3} = 3$ .

Zusätzlich gilt:  $f''(1) = -6 < 0$  und  $f''(3) = 6 > 0$ . Daher ist 1 die lokale Maximalstelle und 3 die lokale Minimalstelle von  $f$ .

Mit  $f(1) = 4$  und  $f(3) = 0$  folgt, dass  $H(1|4)$  der lokale Hochpunkt und  $T(3|0)$  der lokale Tiefpunkt des Graphen von  $f$  ist.

[Hinweis: Eine Argumentation an Graphen ist aufgrund des Operatorzusatzes „rechnerisch“ nicht zulässig.]

## Modelllösung c)



Ansatz:  $s: y = m \cdot x + b$ .

$$m = \frac{0,875 - 4}{3,5 - 1} = -\frac{5}{4}.$$

Einsetzen der Koordinaten von  $P$  in  $y = m \cdot x + b$  liefert:

$$4 = -\frac{5}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 5\frac{1}{4}.$$

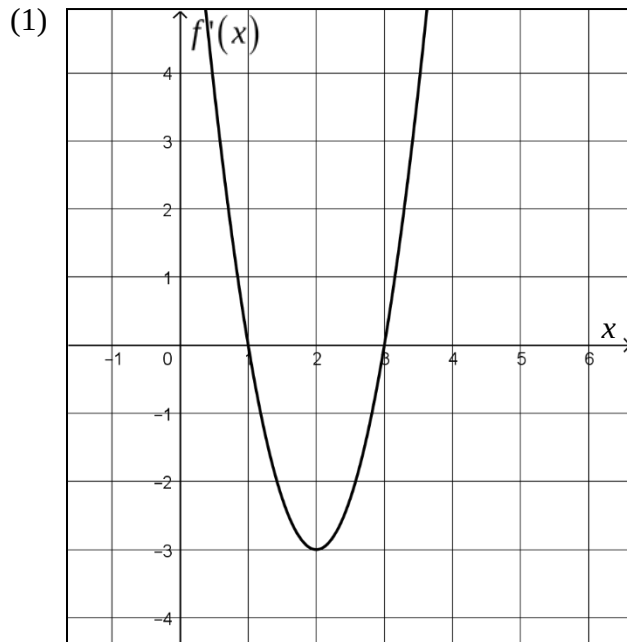
Gleichung der Sekante  $s: y = -\frac{5}{4} \cdot x + 5\frac{1}{4}$ .

$$(2) \quad \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + 180^\circ \approx 128,66^\circ.$$

[Die Angabe  $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) \approx -51,34^\circ$  ist ebenfalls zulässig.]

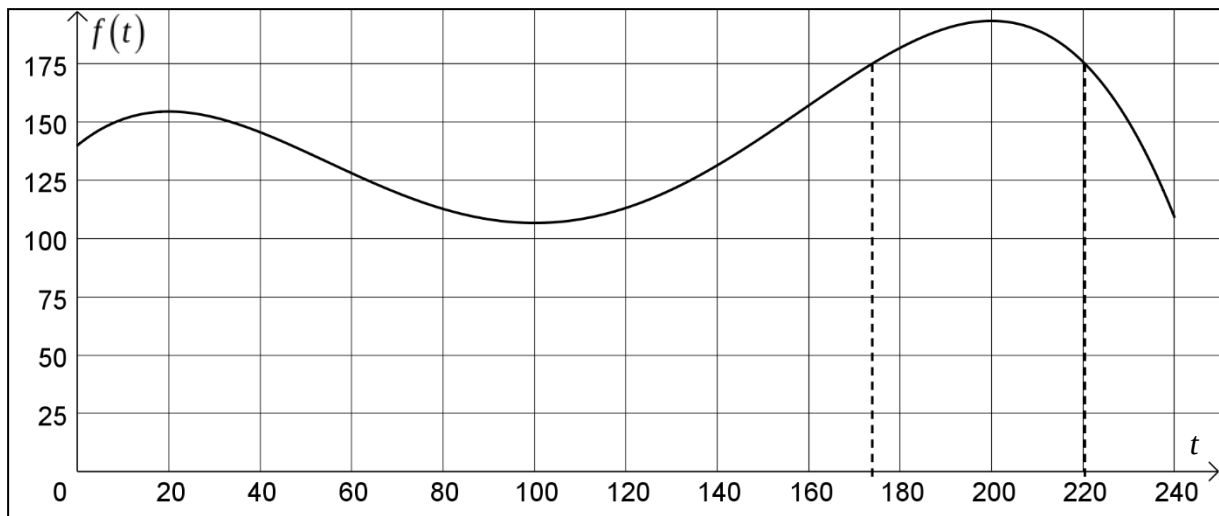


## Modelllösung d)



[Hinweis: Zur Ermittlung von Funktionswerten bietet es sich an, eine Wertetabelle mit dem WTR zu erzeugen.]

- (2) Der Graph von  $g'$  geht durch eine Verschiebung um 4 Einheiten nach oben aus dem Graphen von  $f'$  hervor. Der Graph von  $g'$  hat damit keine Nullstelle, also kann der Graph von  $g$  keinen lokalen Extrempunkt besitzen.

**Aufgabe 4:****Modelllösung a)**

Der Graph von  $f$  verläuft ungefähr im Intervall  $[175;220]$  oberhalb von  $y = 175$ .

Es liegen ungefähr 45 Minuten lang Blutzuckerwerte über  $175 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$  vor.

**Modelllösung b)**

Das absolute Maximum von  $f$  kann nur an einer Nullstelle von  $f'$  oder an einer Randstelle auftreten.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{250000} \cdot (t-20) \cdot (t^2 - 300 \cdot t + 20000) = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 20 = 0 \vee t^2 - 300 \cdot t + 20000 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 20 \vee t = 150 - \sqrt{150^2 - 20000} = 100 \vee t = 150 + \sqrt{150^2 - 20000} = 200.$$

Zusätzlich gilt:

$$f(180) \approx 181,8, \quad f(200) \approx 193,3 \quad \text{und} \quad f(240) \approx 109,3.$$

[Hinweis: Zur Ermittlung der Funktionswerte bietet es sich an, eine Wertetabelle mit dem WTR zu erzeugen.]

Der größte Blutzuckerwert im Zeitraum von 180 Minuten bis 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt ungefähr  $193,3 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ .

[Hinweis: In der zugehörigen Aufgabenstellung bezieht sich der Operatorzusatz „rechnerisch“ auf die gesamte Untersuchung (hier: Lage und Art der Extremstellen). Eine Argumentation an Graphen ist daher nicht zulässig.]

**Modelllösung c)**

(1) Eine passende Aufgabenstellung ist:

Ermitteln Sie die Zeitpunkte im Beobachtungszeitraum, zu denen die Blutzuckerwerte am schnellsten steigen bzw. fallen.

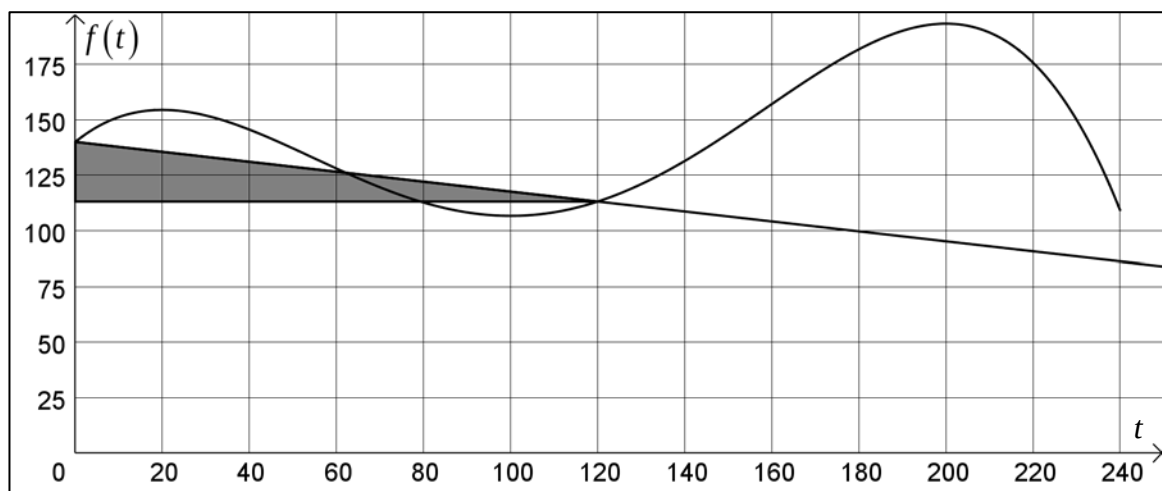
(2) Die absoluten Extremstellen der Änderungsrate  $f'$  des Blutzuckerwertes können nur die Nullstellen von  $f''$  oder die Randstellen sein. Der Vergleich der Funktionswerte von  $f'$  an diesen Stellen liefert die absoluten Extremstellen von  $f'$ .

(3) Zu Beobachtungsbeginn steigt der Blutzuckerwert am schnellsten, am Ende des Beobachtungszeitraums fällt der Blutzuckerwert am schnellsten.

**Modelllösung d)**

(1) Geometrische Bedeutung von Term I: Steigung der Sekante durch die beiden Punkte  $(0|f(0))$  und  $(120|f(120))$  des Graphen von  $f$ .

Geometrische Bedeutung von Term II: Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(120|f(120))$ .



(2) Bedeutung der berechneten Werte im Sachzusammenhang:

I: Während der ersten 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert pro Minute durchschnittlich um  $0,224 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$  ab.

II: 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert mit der momentanen Rate von  $0,64 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$  pro Minute zu.

**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktschritten ist folgende Tabelle zu verwenden:

| <b>Note</b>  | <b>Erreichte Punktschritte</b> |
|--------------|--------------------------------|
| sehr gut     | 52 – 60                        |
| gut          | 43 – 51                        |
| befriedigend | 34 – 42                        |
| ausreichend  | 25 – 33                        |
| mangelhaft   | 13 – 24                        |
| ungenügend   | 0 – 12                         |