Name: ____________________

Beispielaufgaben Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase ab 2024

Mathematik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 3,\ x \in \mathbb{R}.$$

a) *Geben Sie die Nullstellen von f gerundet auf zwei Nachkommastellen an.*

(2 Punkte)

b) (1) *Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion f auf lokale Extremstellen und ermitteln Sie rechnerisch die Art der lokalen Extremstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.*

(2) *Begründen Sie, dass der lokale Hochpunkt kein globaler Hochpunkt des Graphen von f ist.*

(6 + 2 Punkte)

c) (1) *Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f.*

(2) *Berechnen Sie eine Gleichung der Wendetangente.*

(3) *Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Wendetangente.*

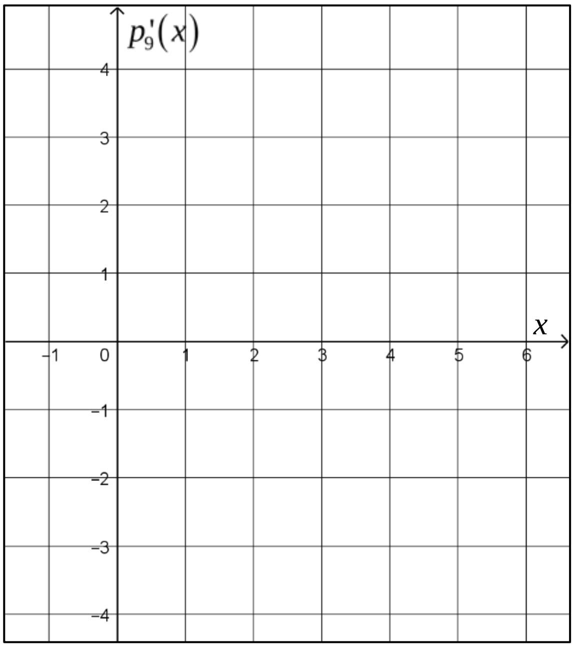
(3 + 3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ wird durch die Gleichung $p_a'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + a$ eine Ableitungsfunktion p_a' festgelegt.

Für $a = 9$ gilt beispielsweise: $p_9'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = f'(x)$.

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von* p_9' *in die Abbildung ein.*



Abbildung

(2) *Beschreiben Sie, wie sich die Graphen von* p_a' *verändern, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.*

(3) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist p_a' die Ableitungsfunktion einer Funktion p_a.

Geben Sie einen möglichen Wert für a an, so dass p_a *keine lokale Extremstelle besitzt, und begründen Sie Ihre Angabe.*

(2 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4:

Patienten, die an Diabetes leiden, müssen regelmäßig Blutzuckermessungen durchführen. In der Regel wird dazu ein Blutstropfen auf einem Teststreifen mit einem elektronischen Testgerät analysiert. Seit einiger Zeit sind auch kontinuierliche Blutzuckermessungen möglich. Dabei wird durch einen Sensor fortlaufend der Blutzuckerwert des Diabetes-Patienten gemessen und übertragen, z. B. an eine Handy-App.

Der Blutzuckerwert eines Diabetes-Patienten wird für $0 \leq t \leq 240$ durch die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{1\,000\,000} \cdot t^4 + \frac{4}{9375} \cdot t^3 - \frac{13}{250} \cdot t^2 + \frac{8}{5} \cdot t + 140$$

modelliert. Dabei ist t die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Minuten und $f(t)$ der Blutzuckerwert in Milligramm pro Deziliter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$.

a) *Ermitteln Sie, wann bei dem Diabetes-Patienten im Beobachtungszeitraum erstmalig ein Blutzuckerwert über* $175\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ *vorliegt.*

(2 Punkte)

b) *Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt jeweils der höchste und der niedrigste Blutzuckerwert im Beobachtungszeitraum vorliegt, und berechnen Sie diese Werte.*

(6 Punkte)

Name: ____________________

c) Bei der Lösung einer Aufgabenstellung im gegebenen Sachzusammenhang wurden mit einem MMS Berechnungen durchgeführt. Dabei ergab sich:

- Die Gleichung $f''(t) = 0$ hat die beiden Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1 \approx 54{,}6$ und $t_2 \approx 158{,}7$.
- $f'(0) = 1{,}6$, $f'(t_1) \approx -0{,}91$, $f'(t_2) \approx 1{,}35$, $f'(240) \approx -4{,}93$.

(1) *Geben Sie eine passende Aufgabenstellung im Sachzusammenhang zu den angegebenen Berechnungen an.*

(2) *Erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.*

(3) *Formulieren Sie einen Antwortsatz zu Ihrer Aufgabenstellung.*

(2 + 3 + 1 Punkte)

d) Gegeben sind die beiden Terme

I $\quad \dfrac{f(120) - f(0)}{120 - 0}$ $\qquad$ II $\quad f'(120)$.

(1) *Ermitteln Sie die Werte der beiden Terme* I *und* II.

(2) *Geben Sie die Bedeutung der beiden unter* (1) *ermittelten Werte im Sachzusammenhang an.*

(2 + 4 Punkte)

e) Die Modellierung soll über den Beobachtungszeitraum von 240 Minuten hinaus fortgesetzt werden. Dazu wird davon ausgegangen, dass ab diesem Zeitpunkt der Wert zunächst gleichmäßig mit der Rate abnimmt, die 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn vorliegt.

Berechnen Sie, wie lange es dann dauert, bis ein Blutzuckerwert von $90\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ *vorliegt.*

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Dokument mit mathematischen Formeln (ab 2025 verpflichtend)
  oder Mathematische Formelsammlung (bis 2024 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgaben Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase ab 2024

Mathematik

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Inhaltsfeld Funktionen und Analysis / Innermathematische Argumentationsaufgabe

Aufgabe 4: Inhaltsfeld Funktionen und Analysis / Aufgabe mit realitätsnahem Kontext

2. Aufgabenstellung [1]

siehe Prüfungsaufgaben

3. Materialgrundlage

Aufgabe 4: modifiziert nach IQB 2018 Analysis

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2024

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
- Dokument mit mathematischen Formeln (ab 2025 verpflichtend) oder Mathematische Formelsammlung (bis 2024 zugelassen)
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Für die Leistungen werden entsprechend der konkreten Lösungsqualität Punkte im vorgegebenen Rahmen vergeben. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung"). Es dürfen nur ganzzahlige Punkte vergeben werden.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

Die Funktion f besitzt drei Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \approx 0{,}47$, $x_2 \approx 1{,}65$ und $x_3 \approx 3{,}88$.

Modelllösung b)

(1) Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = 3$.

Zusätzlich gilt $f''(1) = -6 < 0$ und $f''(3) = 6 > 0$. Daher ist 1 die lokale Maximalstelle und 3 die lokale Minimalstelle von f.

Mit $f(1) = 1$ und $f(3) = -3$ folgt, dass $H(1|1)$ der lokale Hochpunkt und $T(3|-3)$ der lokale Tiefpunkt des Graphen von f ist.

[Hinweis: Eine Argumentation an Graphen ist aufgrund des Operatorzusatzes „rechnerisch" nicht zulässig.]

(2) $f(5) = 17 > 1$.

Daher ist der lokale Hochpunkt H des Graphen von f kein globaler Hochpunkt des Graphen von f.

Modelllösung c)

(1) Aus der notwendigen Bedingung $f''(x) = 0$ für Wendestellen ergibt sich die Lösung $x = 2$.

Mit $f(2) = -1$ folgt, dass $W(2|-1)$ der Wendepunkt des Graphen von f ist.

[Hinweis: Da die Existenz der Wendestelle durch den Aufgabentext gesichert ist, ist eine Überprüfung mit einem hinreichenden Kriterium nicht notwendig.]

(2) Ansatz: $y = m \cdot x + b$.

$m = f'(2) = -3$.

Einsetzen in $y = m \cdot x + b$ liefert:

$-1 = -3 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 5$.

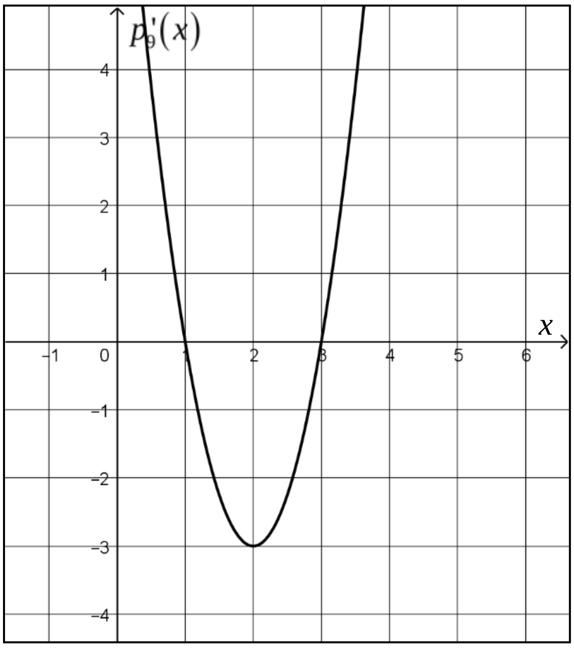
Gleichung der Wendetangente: $y = -3 \cdot x + 5$.

(3) $\alpha = \tan^{-1}(-3) + 180° \approx 108{,}43°$.

[Die Angabe $\alpha = \tan^{-1}(-3) \approx -71{,}57°$ ist ebenfalls zulässig.]

Modelllösung d)

(1)



(2) Wenn für a immer größere Zahlen eingesetzt werden, dann werden die Graphen von p_a' nach oben verschoben.

(3) Gilt $a = 13$, so besitzt der Graph von p_a' keine Nullstellen und somit hat p_a keine lokale Extremstelle.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

Die Gleichung $f(t)=175$ hat im Intervall $[0;240]$ die beiden Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1 \approx 173{,}91$ und $t_2 \approx 220{,}40$.

Zusätzlich gilt: $f(0)<175$, $f(200)>175$.

Ca. 174 Minuten nach Beobachtungsbeginn überschreitet der Blutzuckerwert erstmalig den Wert von $175\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$.

Modelllösung b)

Die absoluten Extrema von f können nur an den Nullstellen von f' oder an den Randstellen auftreten.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=20 \vee t=100 \vee t=200$.

Zusätzlich gilt:

$f(0)=140$, $f(20)=\frac{11584}{75}\approx 154{,}5$, $f(100)=\frac{320}{3}\approx 106{,}7$, $f(200)=\frac{580}{3}\approx 193{,}3$ und $f(240)=\frac{2732}{25}\approx 109{,}3$.

Der kleinste Blutzuckerwert im Beobachtungszeitraum beträgt ungefähr $106{,}7\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$, der größte Blutzuckerwert im Beobachtungszeitraum beträgt ungefähr $193{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$.

[Hinweis: In der zugehörigen Aufgabenstellung bezieht sich der Operatorzusatz „rechnerisch“ auf die gesamte Untersuchung (hier: Lage und Art der Extremstellen). Eine Argumentation an Graphen ist daher nicht zulässig.]

Modelllösung c)

(1) Eine passende Aufgabenstellung ist:

Ermitteln Sie die Zeitpunkte im Beobachtungszeitraum, zu denen die Blutzuckerwerte am schnellsten steigen bzw. fallen.

(2) Die absoluten Extremstellen der Änderungsrate f' des Blutzuckerwertes können nur die Nullstellen von f'' oder die Randstellen sein. Der Vergleich der Funktionswerte von f' an diesen Stellen liefert die absoluten Extremstellen von f'.

(3) Zu Beobachtungsbeginn steigt der Blutzuckerwert am schnellsten, am Ende des Beobachtungszeitraums fällt der Blutzuckerwert am schnellsten.

Modelllösung d)

(1) I: $\frac{f(120)-f(0)}{120-0}=-\frac{18}{125}=-0{,}224$.

II: $f'(120)=\frac{16}{25}=0{,}64$.

(2) Bedeutung der Werte im Sachzusammenhang:

I: Während der ersten 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert pro Minute durchschnittlich um $0{,}224\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ ab.

II: 120 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Blutzuckerwert mit der momentanen Rate von $0{,}64\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute zu.

Modelllösung e)

Die Gleichung $f(240)+f'(240)\cdot d=90$ liefert $d\approx 3{,}91$.

Es dauert knapp vier Minuten, bis ein Blutzuckerwert von $90\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ vorliegt.

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Erreichte Punktsummen**
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12