Beispielklausur für zentrale Klausuren

Mathematik

Aufgabenstellung

Die Titanwurz ist die Pflanze, die die größte Blüte der Welt hervorbringt. Für ein Referat hat ein Schüler in einem deutschen Gewächshaus eine solche Pflanze täglich beobachtet und ihre Blütenhöhe notiert. Er hat berechnet, dass sich die Höhe der Blüte während seiner Beobachtung gut durch die Funktion h mit

$$h(t) = -0{,}015 \cdot t^3 + 0{,}45 \cdot t^2 + 2$$

beschreiben lässt.

Dabei bezeichnet t die Anzahl der Tage, die seit dem Beobachtungsbeginn vergangen sind und $h(t)$ die Höhe der Blüte in cm.

Der Graph von h ist in Abbildung 1 dargestellt.

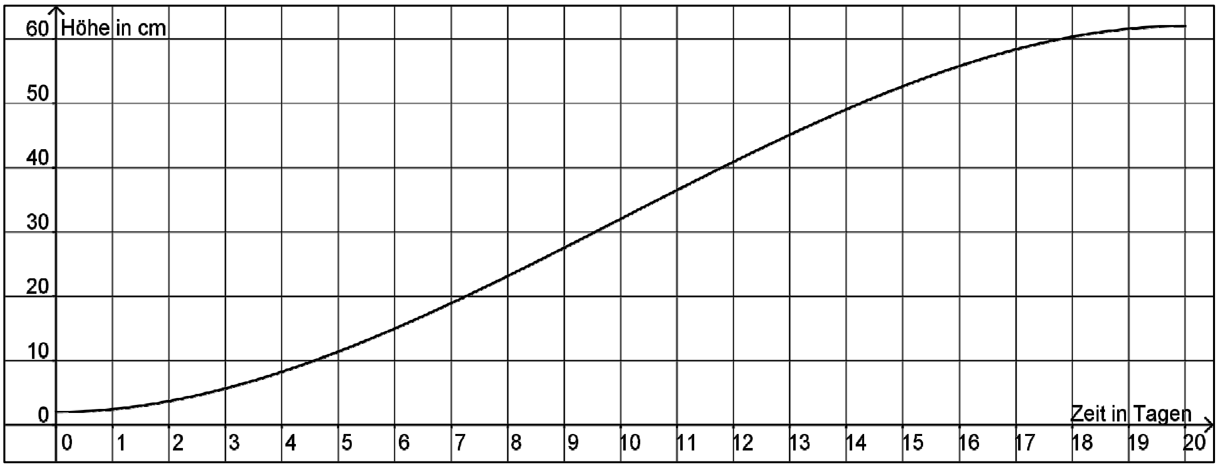


Abbildung 1

Mit dieser Funktion h ist es möglich, die folgenden Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Höhe der Blüte* 3 *Tage nach Beobachtungsbeginn.*

Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Blüte eine Höhe von 20 cm erreicht (Das Ergebnis ist in Tagen und Stunden anzugeben). **(5 Punkte)**

b) *Berechnen Sie* $\dfrac{h(3)-h(0)}{3-0}$ *und berechnen Sie* $h'(3)$.

Geben Sie an, welche Bedeutung diese beiden von Ihnen berechneten Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang haben. **(6 Punkte)**

c) *Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Tagen ab Beobachtungsbeginn die Blüte der Pflanze ihre maximale Höhe erreicht.*

Berechnen Sie die maximale Höhe der Blüte. **(8 Punkte)**

d) Manche Botanische Gärten geben zwei Tage vor dem Zeitpunkt, an dem die Blüte der Pflanze am schnellsten wächst, ein besonderes Düngemittel.

Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze hier gedüngt werden müsste.

(5 Punkte)

e) In einem anderen Botanischen Garten, in Italien, wurde die Blüte der Titanwurz mehr als 4-mal so hoch wie die Blüte, die der Schüler in Deutschland beobachtet hat. In Abbildung 2 sind die Messungen für die italienische Blüte dargestellt.

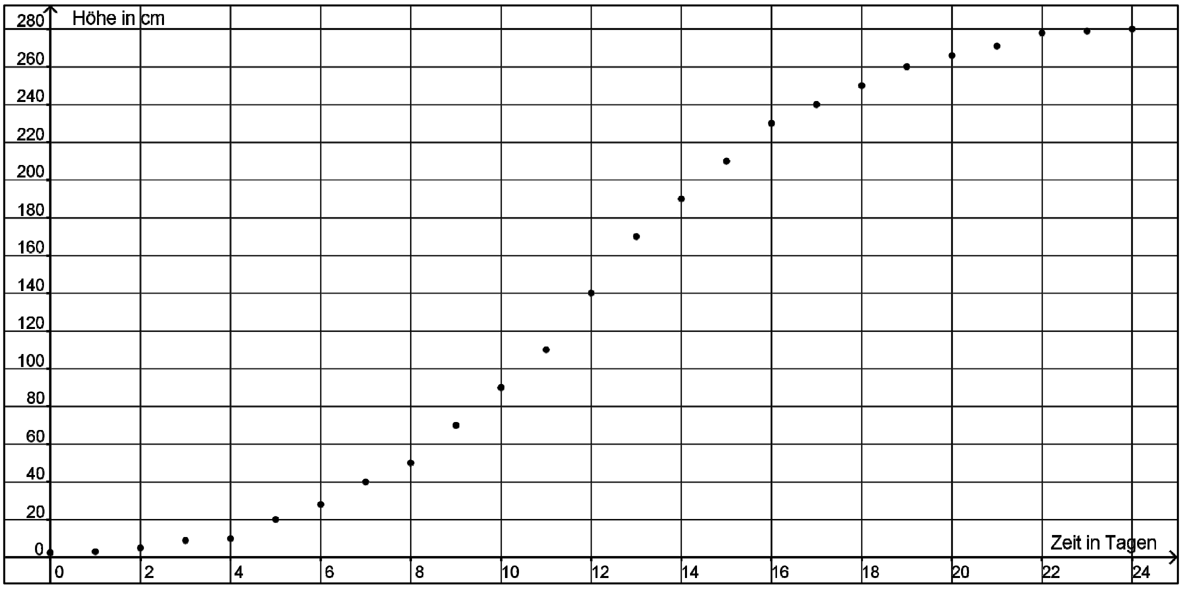


Abbildung 2

Der Schüler möchte auch hier eine ganzrationale Funktion f dritten Grades finden, die das Wachstum der Blüte aus Italien beschreibt. Dazu überlegt er sich, dass die Messungen gut durch eine Funktion f modelliert werden können, deren Ableitung f' von folgender Form ist:

$$f'(t) = a \cdot t \cdot (t - 24)$$

Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung für f'.

(1) *Skizzieren Sie im Bereich* $0 \le t \le 24$ *die vier zu* $a = -1$, $a = -0{,}5$, $a = 0{,}5$ *und* $a = 1$ *gehörenden Graphen von* f' *und beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten dieser Graphen.*

(2) *Begründen Sie, warum für die Ableitungsfunktion* f' *der gesuchten Funktion* f *zur Modellierung der Messungen der obige Ansatz* $f'(t) = a \cdot t \cdot (t - 24)$ *gewählt wird.*

(3) *Entscheiden Sie begründet, ob zur Modellierung des gegebenen Sachzusammenhanges* a *positiv oder negativ sein muss.*

(8 Punkte)

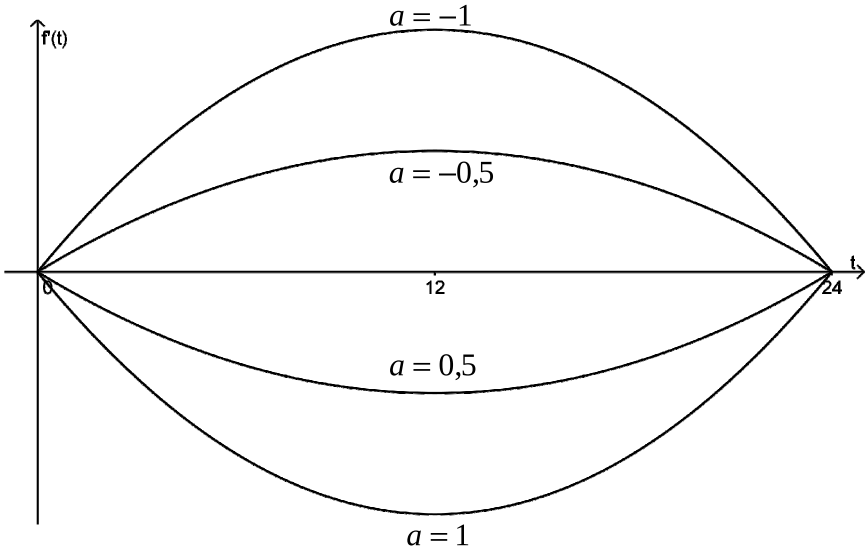
Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung

Beispielklausur für zentrale Klausuren
Mathematik

Unterlagen für die Lehrkraft – Modelllösungen

Nr.		Punkte
2a	$h(3) = 5{,}645$	
	Im Modell wäre die Blüte 3 Tage nach Beobachtungsbeginn ca. 5,6 cm hoch.	2
	Hier muss die Gleichung $h(t) = 20$ gelöst werden. Es ergeben sich drei Lösungen: $t_1 \approx 7{,}27$, $t_2 \approx 28{,}53$ und $t_3 \approx -5{,}79$. Relevant ist hier $t_1 \approx 7{,}27$, d.h. nach sieben Tagen und ca. $6\frac{1}{2}$ Stunden ist die Blüte im Modell 20 cm hoch.	3
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2b	$\frac{h(3)-h(0)}{3-0} = 1{,}215$ $h'(t) = -0{,}045 \cdot t^2 + 0{,}9 \cdot t$ $h'(3) = 2{,}295$	2
	Die Blüte hat im Modell in den ersten drei Tagen der Beobachtung eine durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 1,2 cm pro Tag. Drei Tage nach Beobachtungsbeginn liegt eine momentane Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 2,3 cm pro Tag vor.	4
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2c	Gesucht ist die Maximalstelle von *h* sowie das Maximum selbst. Mit der notwendigen Bedingung $h'(t) = 0$ folgt: $-0{,}045 \cdot t^2 + 0{,}9 \cdot t = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $t_1 = 0$ und $t_2 = 20$. Wegen $h''(20) = -0{,}9 < 0$ liegt an der Stelle $t_2 = 20$ ein Maximum mit $h(20) = 62$ vor. Für den gegebenen Sachzusammenhang handelt es sich offensichtlich auch um das absolute Maximum. Die Blüte erreicht 20 Tage nach Beobachtungsbeginn ihre maximale Höhe von 62 cm.	8
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in	

	der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2d	Gesucht ist zunächst die Zeit t, für die h' maximal ist. $h''(t)=0 \Leftrightarrow -0{,}09\cdot t+0{,}9=0 \Leftrightarrow t=10$. Weil zusätzlich $h'''(10)=-0{,}09<0$ gilt, ist $t=10$ die gesuchte Stelle. Nach dem Modell sollte die Pflanze also 8 Tage nach Beobachtungsbeginn gedüngt werden. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	5
2e	(1)  Alle Graphen schneiden die t-Achse an den Stellen $t=0$ und $t=24$. Sie besitzen an der Stelle $t=12$ einen Extrempunkt.	3
	(2) Aus der in der Aufgabe gegebenen Abbildung kann man erkennen: Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades zur angemessenen Modellierung der Messungen müsste an den Stellen $t=0$ und $t=24$ (nahezu) waagerechte Tangenten haben. Daher wurde vom Schüler der Ansatz über eine Ableitungsfunktion gewählt, die quadratisch ist und die Nullstellen $t=0$ und $t=24$ besitzt. (Damit liegt automatisch die extremale Steigung des Graphen von f bei $t=12$.)	3
	(3) a muss negativ sein (Graph: nach unten geöffnete Parabel), damit im Bereich $0<t<24$ positive Funktionswerte von f' vorliegen und somit der Graph von f steigt. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	2
	Summe:	**32**

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	64 - 62
sehr gut	14	61 - 58
sehr gut minus	13	57 - 55
gut plus	12	54 - 52
gut	11	51 - 48
gut minus	10	47 - 45
befriedigend plus	9	44 - 42
befriedigend	8	41 - 38
befriedigend minus	7	37 - 35
ausreichend plus	6	34 - 32
ausreichend	5	31 - 28
ausreichend minus	4	27 - 25
mangelhaft plus	3	24 - 21
mangelhaft	2	20 - 17
mangelhaft minus	1	16 - 13
ungenügend	0	12- 0