Handreichungen zum Übergang an der Schnittstelle zwischen Klasse 9 und der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe

Die Einführungsphase knüpft weiterhin an die Standards für den mittleren Schulabschluss an und führt in Gebiete ein, die in der Qualifikationsphase unterrichtet werden. Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kenntnisse werden im Sinne eines Spiralcurriculums vertieft und ausgeweitet.

Die im Lehrplan angesprochene immanente Wiederholung wichtiger Themen aus der Sekundarstufe I werden nun unter dem Fokus „Umgang mit Funktionsklassen“ ausgeweitet. Das zum Teil isolierte Wissen über lineare und quadratische Funktionen, über die Sinusfunktion und exponentielle Funktionen wird unter systematischerer Akzentsetzung wieder aufgegriffen und in einen größeren Zusammenhang gestellt. So betrachtet man z.B. diese Funktionen unter dem gemeinsamen Gesichtspunkt „Transformationen und deren Verknüpfung“. Eine Ausweitung dieser Betrachtungen auf Potenzfunktionen stellt eine weitere Vertiefung dar und ermöglicht im Falle $f(x) = x^{-1}$ die Anknüpfung an die antiproportionalen Zuordnungen aus der SI, im Falle $f(x) = x^{-2}$ die Ausweitung von Symmetrie- sowie Grenzwertbetrachtungen (Verhalten im Unendlichen, Polstellen).

Durch die Verschiebung der Sinusfunktion gelangt man zur Kosinusfunktion und kann die aus der Sekundarstufe I bekannten Anwendungszusammenhänge bei der Berechnung geometrischer Größen wieder aufgreifen. Verschiedene Verfahren zur Nullstellenberechnung werden wiederholt (lineare, quadratische Funktionen) und ausgeweitet auf exponentielle Funktionen. Dabei sollte am Beispiel der Gleichung $f(x) = x^2-2$ auf die irrationalen Zahlen eingegangen und das Verfahren der Intervallschachtelung sowie die Lückenlosigkeit der Zahlengeraden angesprochen werden.

An dieser Stelle und bei der vertiefenden Behandlung der exponentiellen Funktionen bietet sich an, die reellen Zahlen als Definitionsbereich für Funktionen zu thematisiseren. Das eher intuitive Verständnis von Definitionsmengen aus der SI wird damit auf ein breiteres Fundament gestellt. Außerdem wird der anwendungsorientierte Zugang der Sekundarstufe I bei den exponentiellen Funktionen im Bereich der Zinseszinsrechnung nun in der Einführungsphase theoretisch untermauert und als Exponenten sowohl die rationalen als auch die reellen Zahlen zugelassen.

Die Frage der Nullstellen von quadratischen und exponentiellen Funktionen führt auch auf die Frage nach der jeweiligen Umkehrfunktion und damit auf Wurzel (x) bzw. lg x. Der bereits in der Sekundarstufe I vorbereitete Einsatz von Funktionenplottern eröfffnet Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Funktionsklassen vor Augen zu führen. Ihr Verständnis funktioneller Zusammenhänge wird bei einem regelmäßigen Einsatz nachhaltig gefördert..

Zur Modellierung eignen sich verschiedene Problemstellungen, z.B. bei der Behandlung von Parabeln und Parabeltangenten und Kreistangenten, die hier noch auf den geometrischen Tangentenbegriff abheben (Tagente als „globale Stützgerade“) und später auf den in der Differentialrechnung einzuführenden analytischen Begriff (Tangente als „lokale Schmiegegerade“ erweitert werden.

Die systematische Behandlung linearer Gleichungssysteme bis zum Grad 3 (z. B. bei der Bestimmung einer Parabel zu drei vorgegebenen Punkten) bereiten Schülerinnen und Schüler auf Inhalte vor, die in der vektoriellen Geometrie wieder aufgegriffen und umfassender behandelt werden.

Zur Modellierung eignet sich auch, die linearen und quadratischen sowie die exponentiellen Funktionen bei der Beschreibung von Wachstumsvorgängen zu betrachten und die Betrachtung periodischer Vorgänge zu vertiefen, für deren Beschreibung bereits in der Sekundarstufe I die Sinusfunktion herangezogen wurde.

Die Inhalte des Kapitels „Beschreibende Statistik" sind bereits weitestgehend durch den Kernlehrplan der Sekundarstufe I abgedeckt. Die entstehenden Freiräume können von den Schulen genutzt werden, um die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Qualifikationsphase zielgerichtet vorzubereiten.

Im Folgenden werden zwei Beispiele eines schulinternen Curriculums für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe vorgestellt. Bei der Ausarbeitung dieser Curricula wurde mit einbezogen, zu welchen verbindlichen Absprachen sich die jeweilige Fachkonferenz für die Sekundarstufe I entschieden hatte.

Beispiel 1 ist von Fachkonferenzvertretern und -vertreterinnen des Gymnasiums Wolfskuhle in Essen erstellt. worden. Das Curriculum wird als eine kurze tabellarische Übersicht der zu behandelnden Vertiefungen dargestellt und durch kommentierende Anmerkungen ergänzt. Es handelt es sich um eine Schule, die regelmäßig viele Schülerinnen und Schüler aus anderen Schulformen in die gymnasiale Oberstufe aufnimmt. Die Stunden werden im traditionellen 45-Minuten-Rhythmus erteilt, darauf bezieht sich die angegebene Dauer für die aufgeführten Gegenstände.

Beispiel 2 ist von Fachkonferenzvertretern und -vertreterinnen der Luisenschule in Mülheim a. d. Ruhr erstellt worden. Diese Schule hat sich für eine kompetenzorientierte Darstellung entschieden. Der Unterricht erfolgt in 60-minütigem Rhythmus, darauf beziehen sich die angegebenen geschätzten Unterrichtswochen.

Beispiel 1: Schulinterner Lehrplan Mathematik Einführungsphase Oberstufe

Schwerpunkt	Inhaltsbezogene Aspekte	Anmerkungen	Dauer
Kreisgleichung und Parabelgleichung Quadratische Funktionen und Parabeln	Abgrenzung Relation und Funktion Scheitelpunktsform, Normalform Verschiebung, Stauchung, Streckung Funktionsermittlung aus gegebenen Punkten Nullstellen, Beziehung Gerade – Parabel Beziehung Gerade – Kreis Tangente (hier nur geometrisch betrachtet)	Wiederholung aus der Sek. I Vertiefung: Gleichungssysteme mit drei Variablen (evtl. auch möglich bei Steckbriefaufgaben) Lösung komplexerer quadratischer Gleichungen, Beziehung Nullstelle der Funktion $x \to x^2-2$ und reelle Zahlen, Prinzip der Intervallschachtelungen, IR als Definitionsmenge	4 Wochen
Potenzfunktionen(x, x^2, x^3,...) , auch mit negativen Exponenten ($1/x$, $1/x^2$)	Funktionsgraphen zeichnen, Verschiebung, Stauchung, Streckung	Arbeit mit dem Funktionenplotter	2 Wochen
Exponentialfunktionen, noch nicht e^x	Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum Exponentielle Funktionen., z. B. 2^x, $0{,}5^x$, 10^x. Dabei die Einführung negativer, gebrochener und reeller Exponenten, z. B. mit dem Permanenzprinzip Potenzgesetze	Wiederholung aus der Sek I: Rückgriff auf Zinseszins Vertiefung: IR als Definitionsmenge Realitätsbezogene Aufgaben	5 Wochen
Gleichungen lösen	lg x und Wurzel(x) als Umkehrfunktion zum Lösen einfacher exponentieller Gleichungen und Wurzelgleichungen		2 Wochen
Sinusfunktion und Kosinusfunktion	Wiederholung der Sinus- und Neueinführung der Kosinusfunktion am Einheitskreis mit thematischen Anwendungen	Keine Berechnungen an Dreiecken, nicht tan(x)	2 Wochen
Transformationen	Transformationen an allen Funktionstypen		1 Woche

Differential-rechnung			
Einführung Differentialrechnung	Steigungsproblem (Sekante und Tangente) Konkrete und allgemeine Steigungen von Tangenten Sonderfälle und Probleme der Differenzierbarkeit *(schulinterne Ergänzung)* Durchschnittliche und momentane Änderungsraten aus anderen Gebieten Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor- und Summenregel)	Kontext Geschwindigkeiten ist obligatorisch Zoomfunktion des Funktionsplotters zur Veranschaulichung der (lokalen) Linearisierbarkeit differenzierbarer Funktionen Ableitungsfunktionen (Aufstellen einer Liste der gängigen Funktionstypen)	6 Wochen
Funktionsuntersuchungen ganzrationaler Funktionen	Nullstellen, Extremwerte (notwendiges und hinreichendes Kriterium), Krümmungsverhalten, Wendestellen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen Funktionsuntersuchungen ganz rationaler Funktionen auch in Sachzusammenhängen	Neu: Lösen von Gleichungen durch Substitution (z.B. biquadratische Gleichungen, schulinterne Ergänzung) Lösen von Gleichungen durch Ausklammern einer Potenz von x, keine Polynomdivision	8 Wochen
Beschreibende Statistik, ggfs. schon Fortführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	Korrelation, Regression, ggfs. Vierfeldertafel, mehrstufige Zufallsversuche, Bernoulliketten, Binomialkoeffizienten, Binomialverteilung	Anknüpfen an bereits in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen Einsatz einer Tabellenkalkulation	5 Wochen

Beispiel 2

Schulinternes Curriculum

M a t h e m a t i k

Luisenschule – Mülheim an der Ruhr

Oktober 2009

Einleitung

Zentrales Ziel dieses schulinternen Curriculums für die Einführungsphase der SII ist es, den Kompetenzerwerb des Lernenden, der bereits in der SI explizit in den Blick gerückt wurde, sinnvoll fortzuführen. Auch dieser Lehrplan enthält Standards, die nicht input- (*Wann werden welche Inhalte unterrichtet?*) sondern **output-orientiert** (*Was kann der Schüler am Ende der Bildungseinheit?*) angelegt sind.

Dabei wird an die Kompetenzerwartungen der Sekundarstufe I angeknüpft, um die Gebiete der Qualifikationsphase effizient vorbereitet.

Um die chronologische und organisch sinnvoll angeordnete Aufzählung der Themen erfolgreich umzusetzen, sind zum einen in der Spalte ZE die voraussichtlich notwendigen Unterrichtswochen bei 60 –minütigen Unterrichtseinheiten aufgeführt. Zum anderen sind in der Spalte der schulintern formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen die zentralen Unterrichtsgegenstände fett gedruckt und die hierzu passenden schulinternen Zielvorgaben in der rechten Spalte formuliert. **Die aufgelisteten Inhalte sind schulintern als verbindlich festgelegt worden** – bis auf die mit einem * versehenen möglichen Ausweitungen. Dieses schulinterne Curriculum lässt der Lehrkraft Freiheiten, um lerngruppengerecht agieren zu können.

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
3	Die SuS … - betrachten und beschreiben kontinuierliche Wachstumsprozesse mit **exponentiellen Funktionen,** indem sie an die **Zinseszinsrechnung** aus der **Sekundarstufe I** anknüpfen - entdecken **die Lückenlosigkeit der reellen Zahlen**	Die SuS … *Modellieren* - prüfen die Gültigkeit und Tragfähigkeit des durch eine exponentielle Funktion gegeben Modells hinsichtlich der Realsituation	Die SuS können … - die Unzulänglichkeit des Funktionsterms 2^n als beschreibendes Modell für Wachstums-prozesse **begründen** und die **Notwendig-keit einer Erweiterung** des Zahlbereiches auf IR **erläutern** - **an Beispielen von Zerfalls- und Wachstumsprozessen (radioaktiver Zerfall, Bakteriumswachstum)** nicht-ganzzahlige reelle Exponenten **deuten** - **Eigenschaften** von Exponentialfunktionen **benennen**
	- beschreiben **Wachstumsprozesse auch mit linearen und quadratischen** Funktionen	*Argumentieren/Kommunizieren* - überprüfen und beurteilen Argumentationsketten auf Korrektheit	- verschiedene **Wachstumsmodelle** (linear, quadratisch, exponentiell) **unterscheiden und vergleichen**

Einführungsphase

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
4	- untersuchen **Potenzfunktionen der Form $f(x)=x^n$; $n \in Z$ und Funktionen der Form $f(x)=x^n+a$; $n \in Z$, $a \in IR$** - deuten den **Exponenten** hinsichtlich der **graphischen Darstellung** der vorgegebenen Potenzfunktion	*Problemlösen* - interpretieren markante Eigenschaften von Graphen von Potenzfunktionen *Argumentieren/Kommunizieren* - skizzieren die Graphen von Potenzfunktionen mit Hilfe markanter Eigenschaften der Funktion	- **Eigenschaften von Graphen der Potenzfunktionen (Symmetrie, Monotonie, Asymptoten, besondere Punkte)** mit Hilfe der Funktionsvorschrift begründet **angeben** - einfache **Potenzgleichungen** der Form $x^n=a$ **lösen** und die gefundene Lösung **als Nullstelle** der Funktion $f(x)=x^n-a$ **deuten**
	- betrachten **am Einheitskreis** die bekannte **Sinusfunktion** und schließen analog auf die Eigenschaften der **Kosinusfunktion**	*Modellieren* - prüfen die Gültigkeit und Tragfähigkeit des durch eine trigonometrische Funktion gegeben Modells hinsichtlich der Realsituation	- anhand **physikalischer Kontexte** (**Weg/Geschwindigkeit** bei **harmonischen Schwingungen**) Zusammenhänge zwischen den Werten der Sinus- und Kosinusfunktion **benennen**

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
3	- nutzen die **Logarithmusfunktion lg x und evtl. $\log_2 x$ al**s Umkehrfunktion zur Lösung außer- und innermathematischer Problemstellungen - deuten die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von x^2 - *ggf. auch n-te Wurzel als Umkehrfunktionen von x^n (positiver Definitionsbereich) - wenden Logarithmen- und Potenzgesetze zur Lösung von Gleichungen wie z. B. $10^{2x+1} = 5$ an.	*Problemlösen* - lösen exponentielle Gleichungen der Form $10^x = b$ näherungsweise durch Probieren - verwenden ihre Kenntnisse zum Lösen innermathematischer Probleme *Werkzeuge nutzen* - verwenden das Logarithmieren als Umkehroperation des Exponenzierens unter Einsatz eines elektronischen Werkzeugs - stellen ausgewählte Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen sowie ihre Umkehrfunktionen mit einem Funktionenplotter graphisch dar	- **Exponentialgleichungen lösen** , um z. B. **Zeitpunkte** für gegebene Bakterienflächen bzw. Restaktivitäten zu **bestimmen** - **Eigenschaften von Wurzelfunktionen mit** den Eigenschaften der zugehörigen **Potenzfunktionen** am Beispiel von Wurzel(x) und x^2 **miteinander in Beziehung setzen** - die **Zusammenhänge zwischen Logarithmen- und Potenzgesetzen** am Beispiel der Zehnerpotenzen und lg x **erläutern**

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
4	- übertragen ihre Kenntnisse über die **Transformationen** $f(x) \to f(x)+c$; $f(x) \to a*f(x)$; $f(x) \to f(x+d)$ **und** $f(x) \to f(b*x)$ bei linearen und quadratischen Funktionen auf **Exponential- und Potenzfunktionen** - erkennen (u.a. mit Hilfe der Potenz- und Logarithmengesetze), dass **verschiedene Transformationen gleiche Wirkungen** haben - begründen, dass die **Sin/Cos-Funktionen** sich nur durch eine **Translation** unterscheiden	*Werkzeuge nutzen* - stellen Funktionen und ihre Transformationen mit einem Funktionenplotter graphisch dar - präsentieren mit Hilfe geeigneter Medien Entdeckungen zu funktionalen Zusammen-hängen	- **Streckungen, Stauchungen** und **Verschiebungen** anhand des Funktionsterms **erkennen und deuten** - **Wirkungen** einzelner Transformationen **beschreiben** - **Funktionsterme** situationsgerecht an eine Problemstellung **anpassen** - eine vorgegebene **harmonische Schwingung** durch Variation der Parameter bei der Sin/Cos-Funktion **modellieren** - **begründen, dass auch** die **Koeffizienten** in der Normalform eines quadratischen Terms **Transformationen darstellen**
	- stellen **LGS mit drei Variablen** auf und **lösen** sie mit geeigneten Verfahren - untersuchen Schnittpunkte von Parabeln und Kreisen mit Geraden und identifizieren Geraden als **Passante, Sekante** oder **Tangente** eines Kreises	- lösen Gleichungssysteme unter Verwendung von elektronischen Werkzeugen *Modellieren* - vereinfachen Realsituationen zu Realmodellen und stellen diese unter Verwendung von Funktionen als mathematische Modelle dar	- **Funktionsterme von Parabeln im Kontext von Bauformen (Brücken, …) bestimmen und deuten**

Einführungsphase

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
7	- stellen den Zusammenhang zwischen **mittlerer Änderungsrate** und **durchschnittlicher Steigung** (Sekantensteigung) her - deuten die **Tangentensteigung** als **Grenzwert** beim Übergang vom **Differenzen**- zum **Differenzialquotienten (sukzessive Vorbereitung: mittlere → momentane Änderungsrate; durchschnittliche → lokale Steigung; Sekante → Tangente)**	*Argumentieren/Kommunizieren* - geben aus Texten, Tabellen und graphischen Darstellungen gewonnene Informationen an, die für die Problemstellung relevant sind - verallgemeinern den geometrischen Tangentenbegriff - begründen inhaltlich-anschaulich an Skizzen den Übergang von der mittleren zur momentanen Änderungsrate und prüfen die Grenzen einer solchen Argumentation *Werkzeuge nutzen* - bestimmen Änderungsraten und Steigungen auch unter Verwendung von elektronischen Werkzeugen	- die **Steigung von Parabeln** für jeden beliebigen Punkt als Grenzwert von Sekantensteigungen **berechnen** und damit die **Gleichung der** zugehörigen **Parabeltangente aufstellen** - für eine gegebene beschleunigte Bewegung die **Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit** bei immer kleiner werdenden Zeitintervallen **interpretieren**

Einführungsphase

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
9	- vollziehen den Übergang von den lokalen Ableitungen zur **Ableitungsfunktion** - finden **Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen**	*Problemlösen* - wenden Methoden der Differenzialrechnung bei der Bestimmung von Nullstellen, Symmetrien, Steigungen, Extrem- und Wendepunkten bei ganzrationalen Funktionen an	- die **Ableitungsfunktion** mit Hilfe des Differenzialquotienten für eine gegebene ganzrationale Funktion **berechnen** - **zu beliebigen ganzrationalen Funktionen** mit Hilfe der Ableitungsregeln ihre **Ableitungsfunktionen berechnen**
	- führen für ganzrationale Funktionen (bis zum Grad 4) eine Funktionsuntersuchung (**Nullstellen, Symmetrie, Steigungsverhalten HP/TP/SP** und **Krümmungsverhalten WP**) durch (keine Polynomdivision!)	*Argumentieren/Kommunizieren* - beschreiben in innermathematischen Situationen Strukturen und Zusammenhänge - skizzieren die Graphen ganzrationaler Funktionen - weisen bei ganzrationalen Funktionen qualitativ Zusammenhänge zwischen dem Funktionsterm und der Existenz sowie der Anzahl von Extrem-, Wende- und Nullstellen nach	- aus dem **Graphen einer Funktion** den Graphen der **Ableitungsfunktion** und umgekehrt **skizzieren** - Charakteristische Punkte (HP/TP/WP; …) **in Sachzusammenhängen interpretieren** und dadurch auch **außermathematische Fragestellungen beantworten**

ZE	inhaltsbezogene Kompetenzen	prozessbezogene Kompetenzen	Erwartete Fähigkeiten, Fertigkeiten, Reflexionsfähigkeit
5	- betrachten **Regression** und **Korrelation** bei Messwerten, ermitteln eine **Ausgleichsgerade bei Experimenten mit linearem Wachstum** und deuten diese inhaltlich	*Werkzeuge nutzen* - ermitteln Regressionsgeraden mit Hilfe einer Tabellenkalkulation / des Taschenrechners	- **Güte der Anpassung** für **Regressionsgeraden** deuten und **beurteilen**
	- behandeln **mehrstufige Zufallsexperimente** - nutzen die **Vierfeldertafel,** um Probleme mit **bedingten Wahrscheinlichkeiten** zu lösen	*Argumentieren/Kommunizieren* - beschreiben mehrstufige Zufallsversuche durch Baumdiagramme und Bernoulliketten und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregel *Modellieren* - interpretieren die im Zusammenhang mit Bernoulliexperimenten ermittelten Wahrscheinlichkeiten im Sachkontext	- begründet **alltägliche Situationen (z. B. Multiple Choice, Münzwurf, etc …) als Zufallsexperimente deuten** - Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten **als Baumdiagramm darstellen** und diese mithilfe der **Pfadregeln berechnen** - mit Hilfe der Vierfeldertafel **bedingte Wahrscheinlichkeiten** situationsgerecht **interpretieren**
	- ggf. *nutzen die **Binomialverteilung**, um Ergebnisse von **Bernoulliketten** zu bestimmen	*Werkzeuge nutzen* - führen Simulationen mit Hilfe geeigneter Medien durch (Binomialverteilung)	*Argumentieren/Kommunizieren* - ggf.* die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge bei einem n-stufigen Bernoulliexperiment **(z.B. Galtonbrett)** mit der Formel $B(n, p, k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ **berechnen**